

Corrigé du Devoir n°1 du 8 avril 2006

Ce corrigé se compose de deux parties. La première comporte uniquement les représentations graphiques, et la seconde partie, en fin de document, comporte l'ensemble des développements.

1. Séries et transformées de Fourier

1-1- Série de Fourier : un onduleur

Un onduleur est un système permettant de convertir une tension continue (E) en une tension alternative ($u(t)$). Le schéma de principe est donné par la Figure 1.

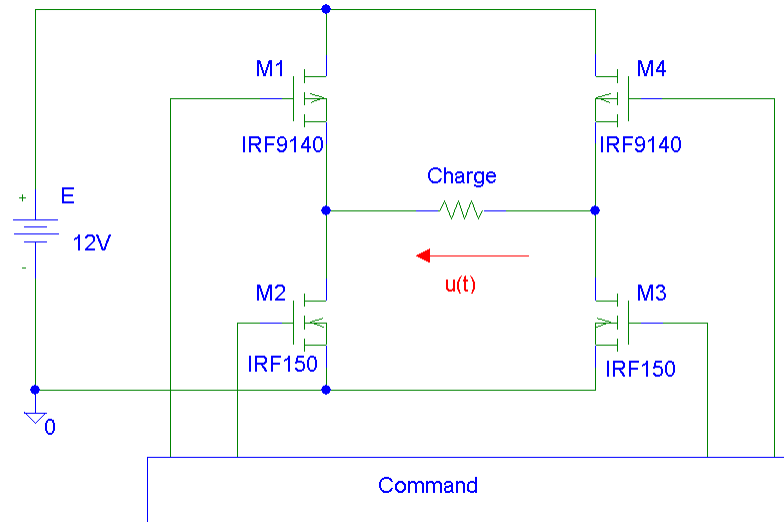


Figure 1 : onduleur (principe)

Les transistors MOS M1 à M4 sont considérés comme des interrupteurs parfaits. Ils sont commandés par le carte de "Commande" à une fréquence $F = 1/T$, suivant le chronogramme de la Figure 2

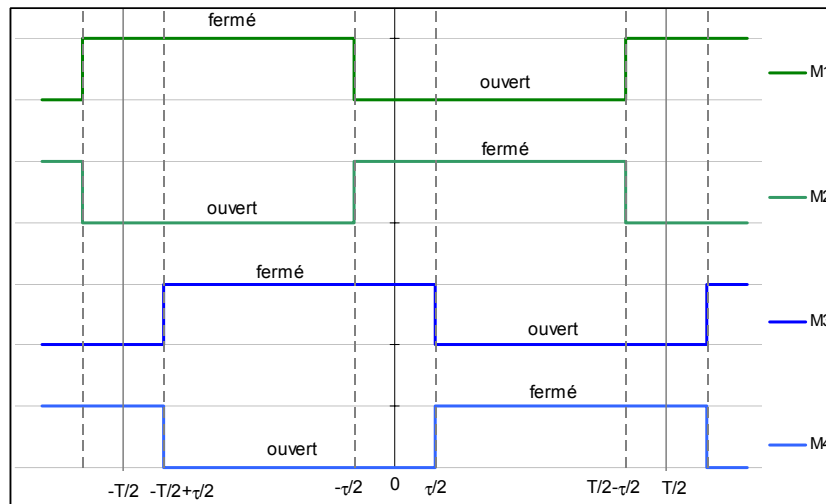


Figure 2 : chronogrammes de commande de l'onduleur

A. Tracer $u(t)$.

Corrigé du Devoir n°1 du 8 avril 2006

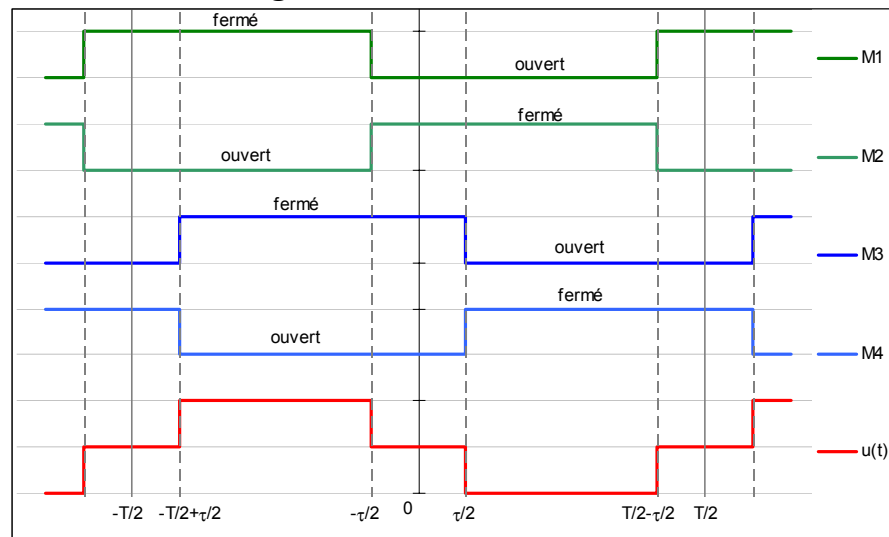


Figure 3 : signaux de commande (M1 à M4) et signal de sortie $u(t)$

- B. Noter les propriétés mathématiques de cette courbe (période, amplitude, symétrie...).
- C. Calculer la série de Fourier de $u(t)$, avec $\omega = 2 \pi F$.
- D. Calculer τ en fonction de T pour que l'harmonique 3 soit nul.
- E. Tracer le module et la phase du spectre du signal $u(t)$ pour la valeur de τ obtenue à la question D.

Corrigé du Devoir n°1 du 8 avril 2006

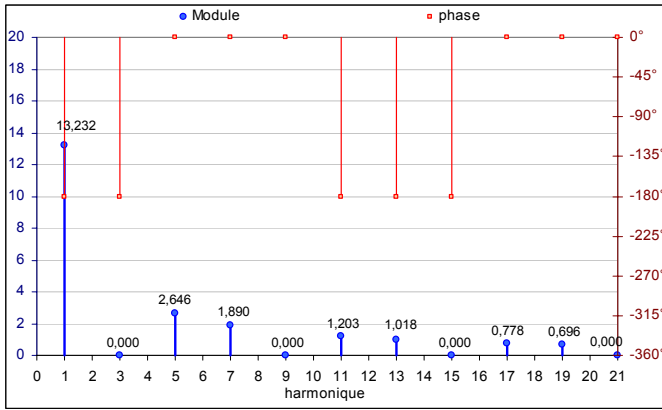


Figure 4 : module et phase du spectre de $u(t)$ pour $\tau = 16,67 \%$

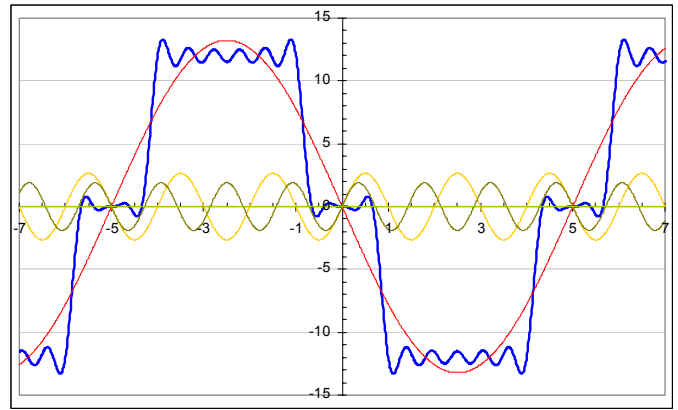


Figure 5 : $u(t)$ (en bleu) et les composantes harmoniques pour $\tau = 16,67 \%$

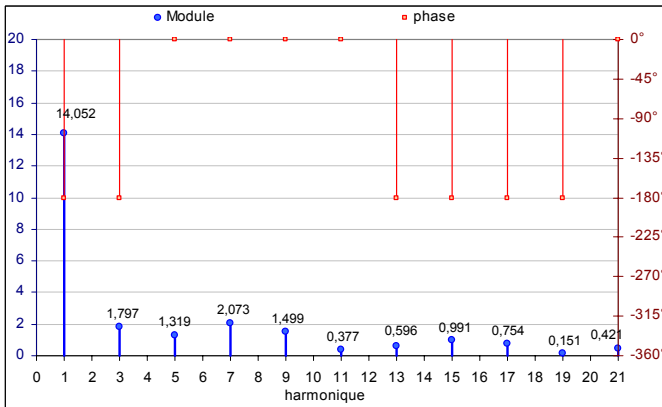


Figure 6 : module et phase du spectre de $u(t)$ pour $\tau = 12,84\%$ (distorsion minimale)

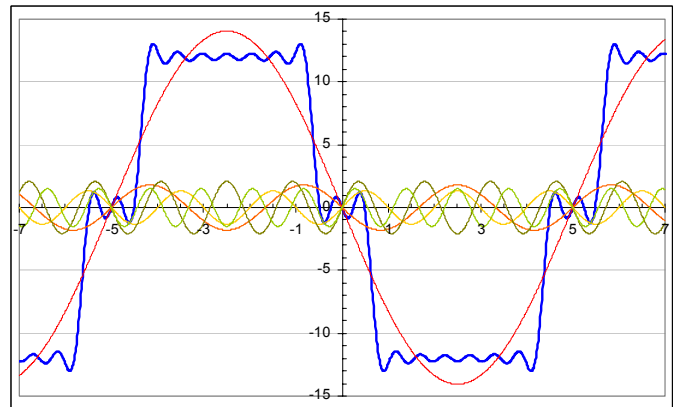


Figure 7 : $u(t)$ (en bleu) pour $\tau = 12,84 \%$

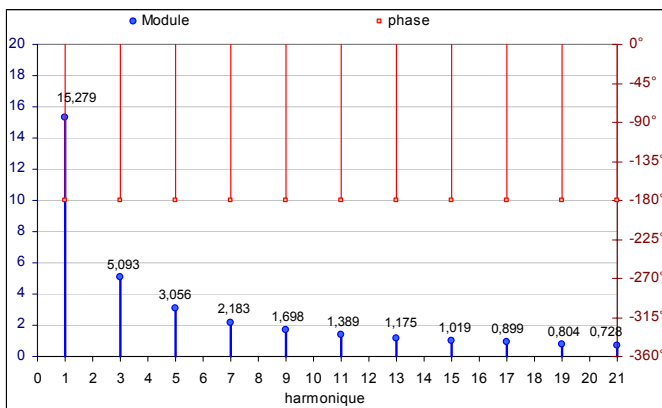


Figure 8 : module et phase du spectre de $u(t)$ pour $\tau = 0$

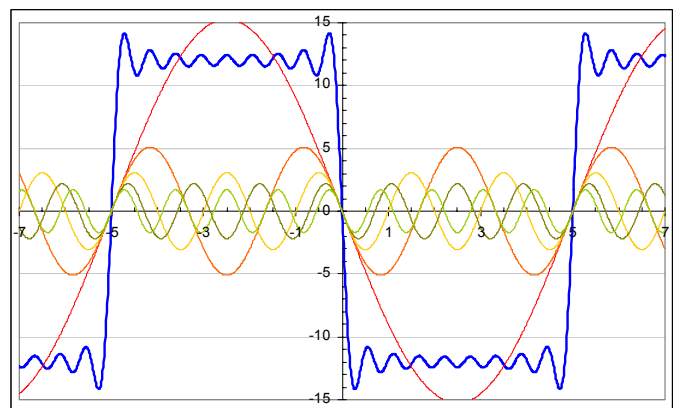


Figure 9: $u(t)$ (en bleu) pour $\tau = 0 \%$

F. Calculer le taux de distorsion de $u(t)$, pour $\tau = 0$ $\tau/T = 0,128$ et $\tau/T = 1/6$.

	$\tau = 0 \%$ signal carré	$\tau = 12,8 \%$ distorsion minimale	$\tau = 16,67 \%$ harmonique $n^{\circ}3 = 0$
Taux de Distorsion Harmonique (IEEE)	45,9 %	26,4 %	28,4 %
Taux de Distorsion Harmonique (IEC)	41,7 %	25,5 %	27,3 %

Corrigé du Devoir n°1 du 8 avril 2006

1-2- Transformée de Fourier

1-2-1. Propriétés :

Soit $y(t)$ un signal déterministe, et $Y(\omega) = TF[y(t)]$ sa transformée de Fourier.

A. Monter que $y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega$ avec $\omega = 2\pi F$.

1-2-2. Démonstration :

Soit deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$, toutes deux de carré intégrable, et leurs transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$.

A. Monter en utilisant les propriétés de la transformée de Fourier que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df$$

Rappel : $y^*(t)$ et le complexe conjugué de $y(t)$.

B. En posant $y(t) = x(t)$, monter que l'on obtient le théorème de Parseval dans le cas des signaux à énergie finie.

2. Produit de convolution

Soit $s(t) = e(t) * h(t)$, le produit de convolution des deux signaux $e(t)$ et $h(t)$.

Rappel : $s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e(\theta) \cdot h_{(t-\theta)} d\theta$ $(e_{1(t)} + e_{2(t)}) * h_{(t)} = e_{1(t)} * h_{(t)} + e_{2(t)} * h_{(t)}$
 $s(t) = e(t) * h(t) = h(t) * e(t)$ $(e_{(t)} * h_{1(t)}) * h_{2(t)} = e_{(t)} * (h_{1(t)} * h_{2(t)})$

A. Calculer le produit de convolution $s(t)$ dans le cas des signaux $e(t)$ et $h(t)$ définis ci-dessous (Figure 11).

B. Représenter graphiquement $s(t)$ pour $E=2$, $T=3,5$ et $\tau=1$.

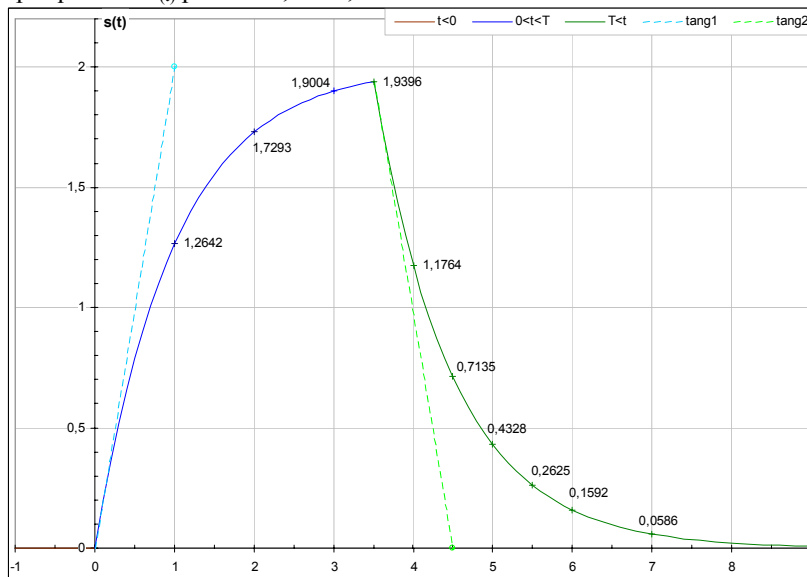


Figure 10 : résultat du produit de convolution : $s(t) = e(t) * h(t)$

C. Le signal $s(t)$ est-il causal ?

$e(t) = 0$	pour $t < 0$	$h(t) = 0$	pour $t < 0$
$e(t) = E$	pour $t \in [0..T]$	$h(t) = e^{-t/\tau}$	pour $t > 0$
$e(t) = 0$	pour $t > T$		

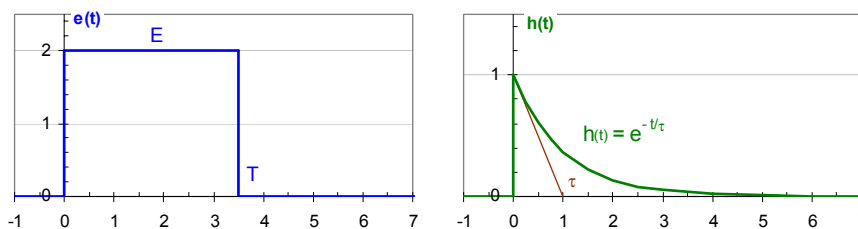


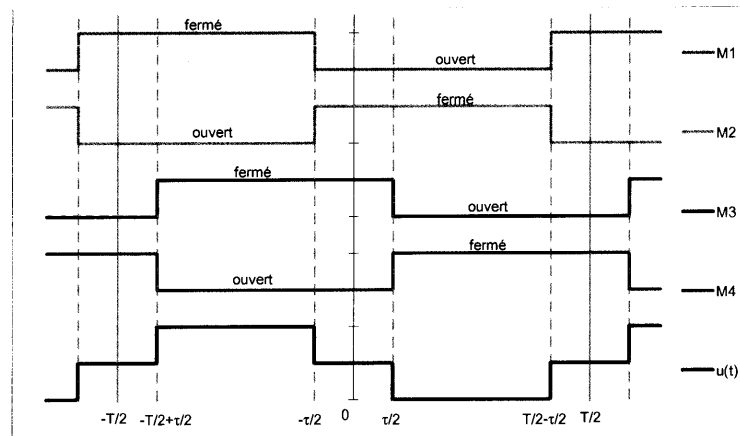
Figure 11 : signaux $e(t)$ et $h(t)$

Solution du devoir n°1.

1. Séries et transformées de Fourier.

1.1 un onduleur.

A: La tension aux bornes de la charge $u(t)$ a l'allure suivante:



$$\text{soit } u(t) = 0 \quad t \in \left] -\frac{T}{2}; -\frac{T+\tau}{2} \right]$$

$$u(t) = +E \quad t \in \left] -\frac{T+\tau}{2}; -\frac{\tau}{2} \right]$$

$$u(t) = 0 \quad t \in \left] -\frac{\tau}{2}; +\frac{\tau}{2} \right]$$

$$u(t) = -E \quad t \in \left] +\frac{\tau}{2}; \frac{T-\tau}{2} \right]$$

$$u(t) = 0 \quad t \in \left] \frac{T-\tau}{2}; +\frac{T}{2} \right]$$

B: Les propriétés mathématiques de $u(t)$ sont les suivantes:

- la période = T
- l'amplitude crête à crête = 2.E
- $u(t) = -u(-t)$ donc $u(t)$ est une fonction impaire. Ceci est visible sur le graphique de $u(t)$, car il y a symétrie par rapport à l'origine.

c. calcul de la série de Fourier du signal $u(t)$.

Tous ^{les} signaux périodiques peuvent être décomposés en série de Fourier.

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

$$\text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad \text{la valeur moyenne de } u(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \cdot \sin(n\omega t) dt$$

dans cet exercice, les coefficients a_0 et a_n sont tous nuls car la fonction $u(t)$ est impaire. $a_0 = a_n = 0$

calcul des b_n :

$$b_n = \frac{2}{T} \left(\int_{-\frac{T+\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{2}} E \cdot \sin(n\omega t) dt + \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{T-\tau}{2}} (-E) \cdot \sin(n\omega t) dt \right)$$

$$b_n = \frac{2E}{T} \left(\int_{-\frac{T+\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{2}} \sin(n\omega t) dt - \int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{T-\tau}{2}} \sin(n\omega t) dt \right)$$

Rappels:

$$\int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$b_n = \frac{2E}{T} \left(\left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{-\frac{T+\tau}{2}}^{-\frac{\tau}{2}} + \left[\frac{-\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_{\frac{T-\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \right)$$

$$b_n = \frac{2E}{n\omega \frac{2\pi}{T}} \left(-\cos\left(\frac{2n\pi}{T} \cdot \left(-\frac{\tau}{2}\right)\right) + \cos\left(\frac{2n\pi}{T} \cdot \frac{T-\tau}{2}\right) - \cos\left(\frac{2n\pi}{T} \cdot \frac{\tau}{2}\right) + \cos\left(\frac{2n\pi}{T} \cdot \frac{T-\tau}{2}\right) \right)$$

Rappel $\cos(-x) = \cos(x)$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \cdot \left(-\cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) + \cos\left(n\pi \frac{T-\tau}{T}\right) \right)$$

Rappel $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

$$\cos\left(n\pi - n\pi \frac{\tau}{T}\right) = \cos(n\pi) \cdot \cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) + 0$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \left(-\cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) + \cos(n\pi) \cdot \cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) \right)$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \cdot \left(\cos(n\pi) - 1 \right) \cdot \cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$b_n = \frac{2E}{n\pi} \cdot \left((-1)^n - 1 \right) \cdot \cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right)$$

$$u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2E}{n\pi} \left((-1)^n - 1 \right) \cdot \cos\left(n\pi \frac{\tau}{T}\right) \cdot \sin\left(2n\pi \frac{t}{T}\right)$$

n	1	2	3	4	5
b _n	$\frac{-4E}{\pi} \cos\left(\pi \frac{\tau}{T}\right)$	0	$\frac{-4E}{3\pi} \cos\left(3\pi \frac{\tau}{T}\right)$	0	$\frac{-4E}{5\pi} \cos\left(5\pi \frac{\tau}{T}\right)$

n	6	7	8	9	10	11
b _n	0	$\frac{-4E}{7\pi} \cos\left(7\pi \frac{\tau}{T}\right)$	0	$\frac{-4E}{9\pi} \cos\left(9\pi \frac{\tau}{T}\right)$	0	$\frac{-4E}{11\pi} \cos\left(11\pi \frac{\tau}{T}\right)$

D. calcul de τ en fonction de T , pour que l'harmonique de rang 3 soit nul.

Cela revient à calculer $\frac{\tau}{T}$ pour que $b_3 = 0$.

$$b_3 = -\frac{4E}{3\pi} \cos\left(3\pi \frac{\tau}{T}\right) = 0$$

$$\cos\left(3\pi \frac{\tau}{T}\right) = 0 \Rightarrow 3\pi \cdot \frac{\tau}{T} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{N}$$

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6} + \frac{k}{3}$$

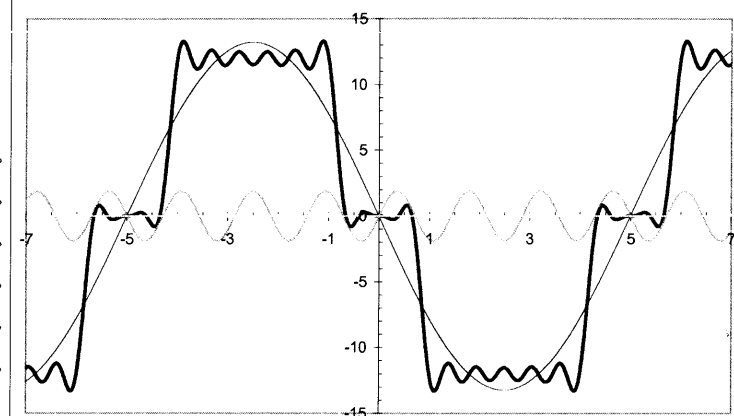
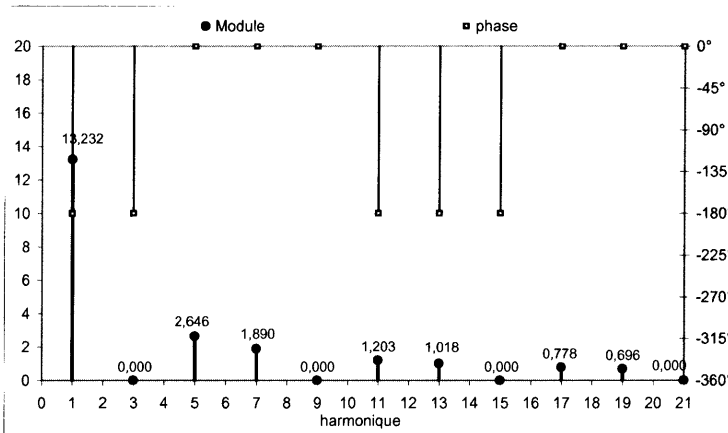
$$\boxed{\frac{\tau}{T} = \frac{1}{6}}$$

$$\tau < \frac{T}{4}$$

E: Représentation graphique du module et de la phase du spectre du signal $u(t)$ dans le cas $\bar{\tau} = \frac{T}{6}$ et $E = 12$

n	1	2	3	4	5	6	7
b_n	$\frac{-48}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$	0	$\frac{-48}{3\pi} \cos\left(3\frac{\pi}{6}\right)$	0	$\frac{-48}{5\pi} \cos\left(5\frac{\pi}{6}\right)$	0	$\frac{-48}{7\pi} \cos\left(7\frac{\pi}{6}\right)$
$ b_n $	13,23	0	0	0	2,65	0	1,89
φ_{b_n}	-180°	0°	0°	0°	0°	0°	0°

n	8	9	10	11	12
b_n	0	$\frac{-48}{9\pi} \cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)$	0	$\frac{-48}{11\pi} \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$	0
$ b_n $	0	0	0	1,203	0
φ_{b_n}	0°	0°	0°	-180°	0°



Représentation du module et de la phase du spectre de $u(t)$

F: Calcul du taux de distorsion harmonique du signal $u(t)$ pour 3 valeurs de $\bar{\tau}$.

Il y a au moins deux façons de calculer le THD (total harmonic distortion).

	$\bar{\tau} = 0\%$	$\bar{\tau} = 12,8$	$\bar{\tau} = 16,6$
$THD_{IEEE} = \frac{\sqrt{H_2^2 + H_3^2 + H_4^2 + \dots + H_n^2}}{H_1}$	45,9%	26,4%	28,4%
$THD_{IEC} = \frac{\sqrt{H_2^2 + H_3^2 + H_4^2 + H_5^2 + \dots + H_n^2}}{\sqrt{H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_4^2 + \dots + H_n^2}}$	41,7%	25,5%	27,3%

H_n : harmonique de rang n

1.2 Transformée de Fourier

1.2.1 Propriétés

soit $y(t)$ un signal déterministe et $Y(\omega)$ sa transformée de Fourier.

$$Y(\omega) = TF[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{avec } \omega = 2\pi f$$

la transformée de Fourier inverse est définie par.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{+j2\pi ft} df$$

on pose $f = \frac{\omega}{2\pi}$ soit $df = \frac{d\omega}{2\pi}$ puis en

faisant le changement de variable, on obtient:

$$\underline{y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\omega) \cdot e^{+j\omega t} d\omega}$$

1.2.2. Démonstration

A. soit deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ ainsi que leurs transformées de Fourier $X(f)$ et $Y(f)$, on cherche à montrer que.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df.$$

$$y^*(t) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) \cdot e^{+2\pi jft} df \right]^*$$

$$y^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) \cdot e^{-j2\pi ft} df$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) \cdot e^{-j2\pi ft} df \right) dt$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot Y^*(f) \cdot e^{-j2\pi ft} \cdot df \cdot dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y^*(f) \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt}_{X(f)} \right) df$$

Rappel: * indique un nombre complexe conjugué.

$$(a+jb)^* = a-jb$$

$$(r \angle \theta)^* = r \angle -\theta$$

donc on obtient bien :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot Y^*(f) df.$$

B. si l'on remplace $y(t)$ par $x(t)$ on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) \cdot X^*(f) df.$$

Rappel: $|z^2| = |z|^2 = z \cdot z^*$
avec $z \in \mathbb{C}$ ou $z \in \mathbb{R}$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

il s'agit de l'énergie de $x(t)$. si l'intégrale existe, on dit que le signal $x(t)$ est un signal transitoire et que l'énergie est finie.

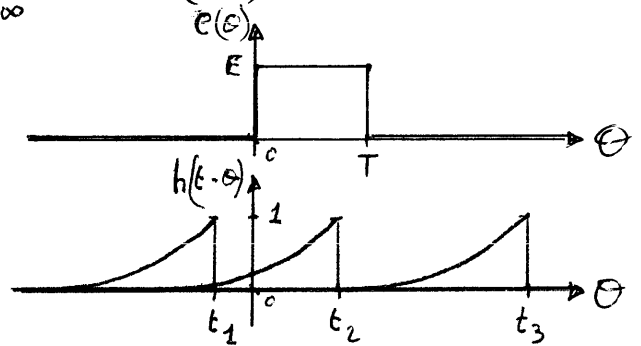
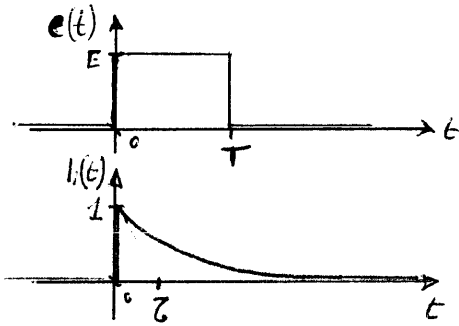
Cette égalité est connue sous le nom de théorème de Parseval.

Elle montre que l'énergie totale d'un signal ne dépend pas du mode de représentation choisi (temporelle : $x(t)$ ou fréquentielle : $X(f)$).

$|X(f)|^2$ est la densité spectrale énergétique.

2. Produit de convolution

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta) \cdot h(t-\theta) d\theta$$



$$e(t) = E \quad t \in [0; T]$$

$$e(t) = 0 \quad t \notin [0; T]$$

$$h(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

t peut prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ ($t \in \mathbb{R}$).

$t_1; t_2; t_3$ sont trois exemples

Nota: dans l'énoncé distribué, il faut remplacer τ à $\frac{1}{\tau}$.

A: Pour faire le calcul de l'intégrale, il faut distinguer trois cas comme le montre la figure ci-dessus.

cas 1: $t < 0$

$s(t) = 0$ car il n'y a pas de zone commune (exemple: $t = t_1$) non nulle.

cas 2: $0 < t < T$

$$s(t) = \int_0^t e(\theta) \cdot h(t-\theta) d\theta$$

la zone commune non nulle s'étend de 0 à t (exemple: $t = t_2$).

$$s(t) = \int_0^t E \cdot e^{-\left(\frac{t-\theta}{\tau}\right)} d\theta$$

$$s(t) = E \tau \left[e^{-\left(\frac{t-\theta}{\tau}\right)} \right]_0^t = E \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Rappel

$$y = e^u \quad y' = \frac{e^u}{u'}$$

$$\boxed{s(t) = E \cdot \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$$

cas 3 $t > T$

la zone commune non nulle s'étend sur la largeur de l'impulsion de E soit de 0 à T .

$$s(t) = \int_0^T E e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} d\theta$$

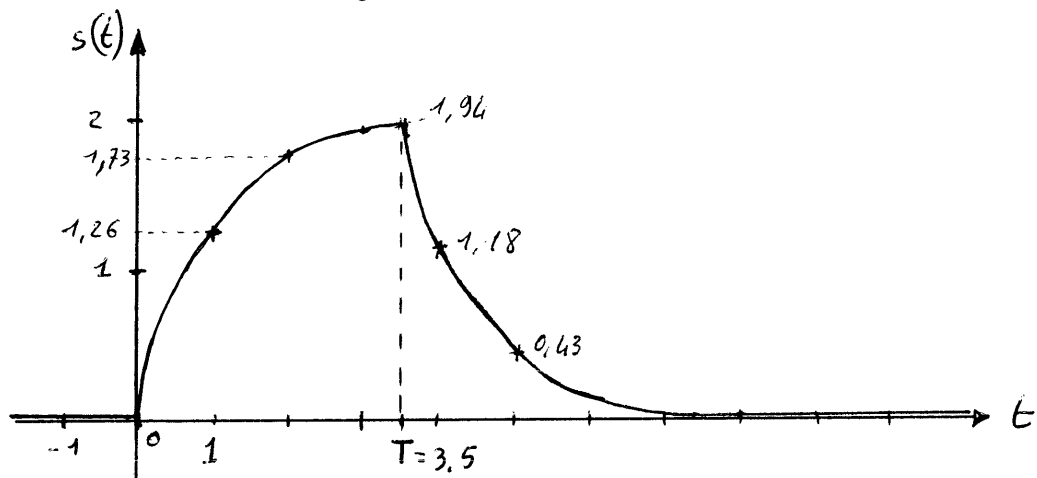
$$s(t) = E \tau \left[e^{-\frac{t-\theta}{\tau}} \right]_0^T = E \tau \left(e^{\frac{T-t}{\tau}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

$$s(t) = E \tau \cdot \left(e^{\frac{T}{\tau}} - 1 \right) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

B. Représentation graphique de $s(t)$ pour $E=2$, $T=3,5$ et $\tau=1$.

cas 1: $s(t)=0$ cas 2: $s(t)=2 \cdot (1 - e^{-t})$

cas 3: $s(t)=2 \cdot (e^{3,5} - 1) \cdot e^{-t}$



C. le signal $s(t)$ est causal car il est nul pour $t < 0$.
la sortie ne peut pas précéder la cause.
le produit de convolution conserve la causalité.