24 juin 2006

TAS ELE 103

correction de l'examen du 24 juin 2006

1. Questions de cours (QCM)

1.1 B un signal causal est nul pour $t<0$

1.2 C $X(f)$ est une impulsion (porte) d'amplitude A et de déphasage $-2\pi f t_0$, de largeur $2 f_c$. $x(t)$ est donc un sinus cardinal.

1.3 C le filtre de type Bessel présente la phase la plus linéaire, ce qui correspond à un temps de propagation de groupe le plus constant dans la bande passante $\left(t_{pgr} = -\frac{d\phi}{dt}\right)$

1.4 A B C
- il n'y a pas de relation entre la stabilité d'un filtre et la fréquence de coupure par rapport à la fréquence du signal.
- l'ondulation dans la bande atténuée pour un filtre de Cauer (ou de tout autre type de filtre) indique que la fonction de transfert comporte des zéros. Il s'agit de la variation du gain en fonction de la fréquence
- Une fonction de transfert dont le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur n'a pas de sens physique car elle correspondrait à des dérivées d'impulsions de dirac.

1.5 D Un filtre de type Bessel peut être d'ordre pair ou impair

1.6 D pour un même ordre, la fonction de transfert de type Chebychev présente une pente plus importante que la fonction de Butterworth, qui elle-même présente une pente plus importante qu'un filtre à amortissement critique, autour de la fréquence de coupure. Pour des filtres de même ordre, la pente symptotique est identique.

1.7 A $S(p) = E(p) \cdot T(p)$. donc $T(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$

le signal d'entrée est un échelon d'amplitude α.

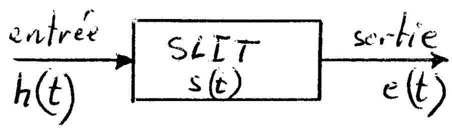
$e(t) = \alpha \cdot u(t) \Rightarrow E(p) = \dfrac{\alpha}{p}$

$$T(p) = \frac{\cancel{\alpha}}{1+2p+p^2} \times \frac{p}{\cancel{\alpha}} = \frac{p}{1+2p+p^2} = \frac{p}{(1+p)^2}$$

1.8 B
E $e(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\theta) \cdot s(\theta)\, d\theta$ est l'expression du

produit de convolution $e(t) = h(t) * s(t)$.

un système linéaire invariant dans le temps (SLIT) dont sa réponse impulsionnelle est $s(t)$, fourni en sortie le signal $e(t)$, s'il est excité en entrée par $h(t)$



⚠ les noms des signaux sont differents des noms habituels.

1.9 C $s(t) = v_2(t)$ on recherche la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{V_2(p)}{E(p)}$

$V_2(p) = \dfrac{V_1(p)}{\tau_1 p}$ $\quad V_1(p) = E(p) - V_2(p) - V_3(p)$ $\quad V_3(p) = \dfrac{V_2(p)}{\tau_2 p}$

$$V_1(p) = E(p) - V_2(p)\left(1 + \frac{1}{\tau_2 p}\right)$$

$$V_2(p) = \frac{E(p)}{\tau_1 p} - \frac{V_2(p)}{\tau_1 p} \cdot \left(\frac{1+\tau_2 p}{\tau_2 p}\right)$$

$$V_2(p)\left(1 + \frac{1+\tau_2 p}{\tau_1 \tau_2 p^2}\right) = \frac{E(p)}{\tau_1 p} \Rightarrow H(p) = \frac{V_2(p)}{E(p)} = \frac{1}{\tau_1 p} \cdot \frac{\tau_1 \tau_2 p^2}{1+\tau_2 p + \tau_1\tau_2 p^2}$$

$$H(p) = \frac{\tau_2 p}{1+\tau_2 p + \tau_1 \tau_2 p^2} \quad \text{ou} \quad H(j\omega) = \frac{j\tau_2 \omega}{1 + j\tau_2\omega - \tau_1\tau_2\omega^2}$$

il s'agit de la fonction de transfert d'un filtre passe bande.

1.10 B
D un signal aléatoire stationnaire au sens large a sa moyenne indépendante du temps ainsi que son autocorrélation.

1.11 C $\lim_{p \to 0} p.F(p) = \lim_{t \to \infty} f(t)$ est le théorème de la valeur finale $(t \to +\infty)$.

1.12 C $E(x^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . p(x)\, dx$ est le moment d'ordre k.

$k = 1$ $E(x)$ = moyenne ou espérance mathématique

$k = 2$ $E(x^2)$ = puissance moyenne ou moment d'ordre 2

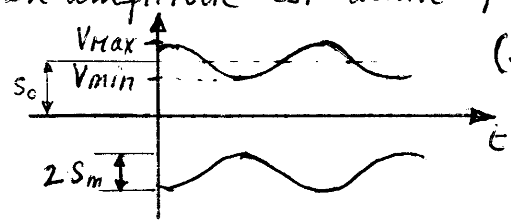
1.13 B

1.14 C la largeur spectrale d'un signal modulé en amplitude est égale à deux fois la plus haute fréquence du signal modulant.

⚠ la réponse E : $2(\Delta F + F_m)$ correspond à la relation de Carson. Elle donne une approximation de la largeur spectrale d'un signal modulé en fréquence.

1.15 C le taux de modulation en amplitude est donné par

$\frac{S_m}{S_0}$ ou $\frac{V_{max} - V_{min}}{V_{max} + V_{min}}$ $(S_p = 1)$



1.16 A

1.17 B Un filtre passe tout a son module indépendant de la fréquence, seule la phase change en fonction de la fréquence. Pour un 1er ordre, le dénominateur doit être du 1er degré.

Pour que ce filtre soit stable, il faut que le pôle soit à partie réelle négative.

1.18 B

1.19 C

1.20 C La conversion étant bipolaire, 1 bit indique le signe du signal. $1\,LSB = \frac{3}{2^{23}} = 357\,nV$

2. Exercice 1 : Filtrage.

2.1 transformation passe bande en passe bas.

<u>Remarques</u> :
- la dissymétrie du gain dans la bande atténuée ne permet pas d'appliquer simplement la méthode de centrage du gabarit.
- avec les tables des coefficients pour les filtres passifs, il n'est pas possible d'obtenir du gain dans la bande passante.

Comme il n'est pas possible de vérifier ou de centrer le gabarit, nous allons considérer qu'il y a deux gabarits de filtre passe bande et nous conserverons le plus contraignant.

- Normalisation :
  - en fréquence

$\omega_0 = 2\pi f_0$

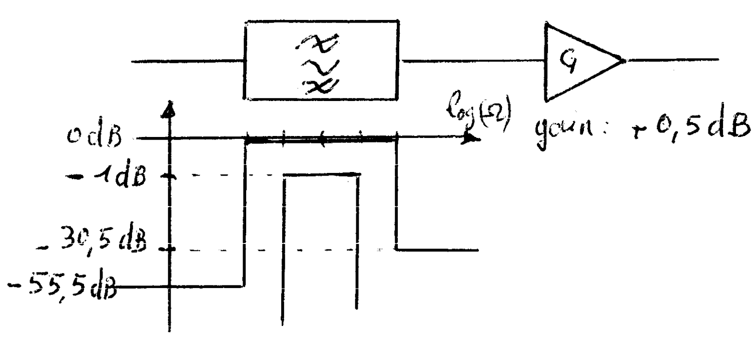
$$\Omega = \frac{f}{f_0} = \frac{\omega}{\omega_0}$$

f_{1A}	f_{1P}	$f_0 = \sqrt{f_{1P} \cdot f_{2P}}$	f_{2P}	f_{2A}	$\log(f)$
44	88	97,488	108	180	(MHz)
Ω_{1A}	Ω_{1P}	$\Omega_0 = 1$	Ω_{2P}	Ω_{2A}	$\log(\Omega)$
0,451	0,903	1	1,108	1,846	

$$\Delta_\Omega = \Omega_{2P} - \Omega_{1P} = 0,205$$

  - en gain

le gain maximal doit correspondre à 0dB. il faut donc faire une translation de $-G_{P2}$ de tout le gabarit. comme les filtres passifs sont donnés pour un gain de 0dB, il faudra ajouter un amplificateur en amont ou en aval du filtre.



24/06/2006

Une autre solution, consiste à rendre le gabarit plus contraignant, en imposant $G_{P_2} = 0dB$ (les autres gains étant inchangés).
Cette contrainte peut conduire à un filtre d'ordre plus élevé. Il y aura donc un choix à faire entre un filtre d'ordre plus grand ou l'ajout d'un amplificateur.

- transposition.

Il faut faire la transposition en considérant les deux gabarits possible, l'un en considérant Ω_{2P} et Ω_{2A} et l'autre Ω_{1P} et Ω_{1A}.

$$\Omega_{PBas} = \left| \frac{1}{\Delta_\Omega} \cdot \left(\Omega_{P\Delta} - \frac{1}{\Omega_{P\Delta}} \right) \right|$$

- 1er cas on prend en compte : Ω_{1A} et Ω_{1P}

$$\Omega_{0_1} = \left| \frac{1}{\Delta_\Omega} \left(\Omega_{1P} - \frac{1}{\Omega_{1P}} \right) \right| = \left| \frac{1}{0,205} \left(0,903 - \frac{1}{0,903} \right) \right| \simeq 1$$

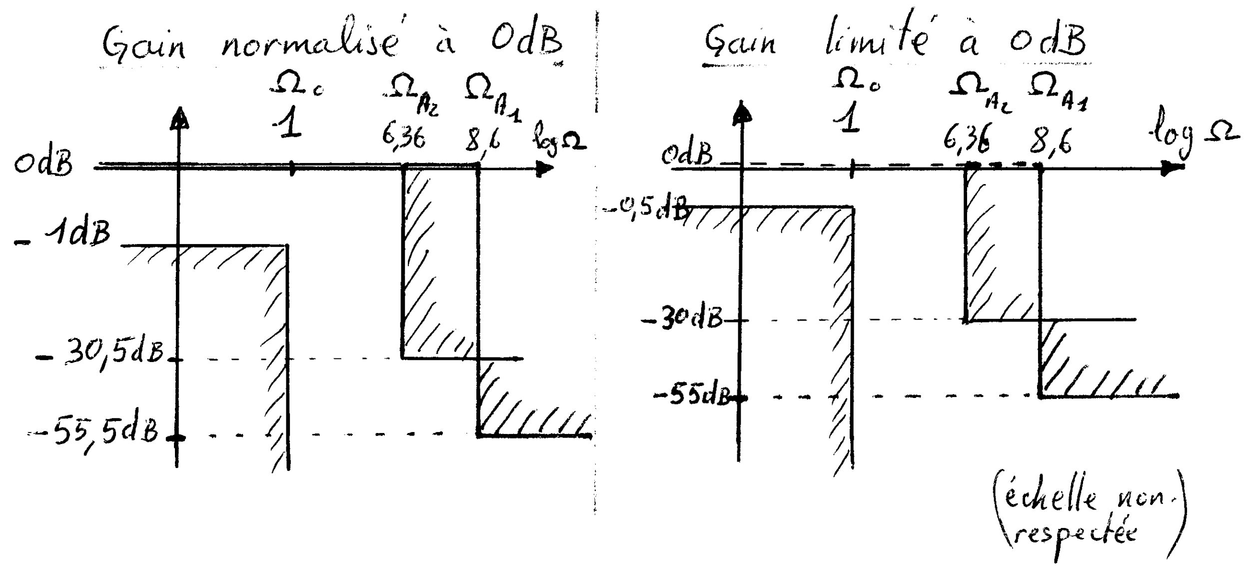
$$\Omega_{A_1} = \left| \frac{1}{0,205} \left(0,451 - \frac{1}{0,451} \right) \right| = 8,600$$

- 2ème cas on prend en compte : Ω_{2P} et Ω_{2A}

$$\Omega_{c_2} = \left| \frac{1}{0,205} \left(1,108 - \frac{1}{1,108} \right) \right| = 1$$

$$\Omega_{A_2} = \left| \frac{1}{0,205} \left(1,846 - \frac{1}{1,846} \right) \right| = 6,360$$

En prenant en compte la normalisation du gain, cela donne quatre gabarits.



2.2 Réalisation

2.2.1 Ce sont les fonctions de cauer qui donnent l'ordre le plus faible pour un gabarit donné, mais compte tenu des tableaux qui sont donnés en annexe, nous utilisons les filtres de type Chebychev. L'ordre du filtre est calculé pour les deux solutions de gestion du gain, pour satisfaire les deux points $(G_{A1}\,;\,\Omega_{A1})$ et $(G_{A2}\,;\,\Omega_{A2})$.

Gain normalisé à 0dB (nécessite un ampli)	Gain limité à 0dB
$(-30{,}5\,dB\,;\,6{,}36) \Rightarrow n > 1{,}92$	$(-30\,dB\,;\,6{,}36) \Rightarrow n > 2{,}05$
$(-55{,}5\,dB\,;\,8{,}6) \Rightarrow n > 2{,}73$	$(-55\,dB\,;\,8{,}6) \Rightarrow n > 2{,}84$
$n = 3$	$n = 3$

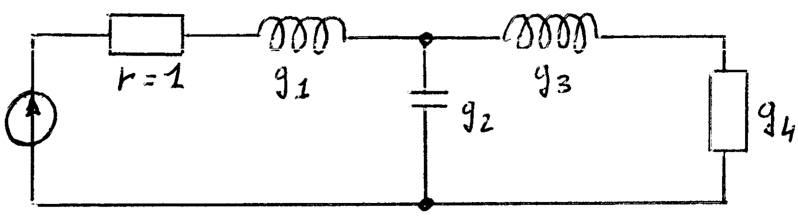
$$n \geqslant \frac{\operatorname{arcosh}\sqrt{\dfrac{10^{-\frac{G_A}{10}}-1}{10^{-\frac{G_P}{10}}-1}}}{\operatorname{arcosh}\left(\Omega_A\right)}$$

Remarques :
- le point $(G_{A1}\,;\,\Omega_{A1})$ est le plus contraignant.
- obtenant le même ordre de filtre (n=3)

24/06/2006

dans les deux cas de gestion du gain (utilisation d'un amplificateur avec une ondulation de 1dB dans la bande passante ou réduction de l'ondulation à 0,5 dB), il est préférable de réaliser la solution sans amplificateur (ondulation = 0,5 dB).

2.2.2 Nous réalisons le filtre passe bas de Chebychev du $3^{ème}$ ordre avec une ondulation de 0,5 dB dans la bande passante



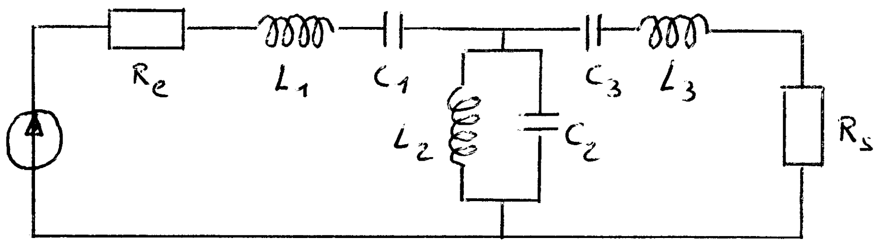
les valeurs des composants normalisés sont obtenues dans le Tableau 2

$$g_1 = 1,5963 \qquad g_2 = 1,0967 \qquad g_3 = g_1 = 1,5963 \qquad g_4 = 1$$

2.2.3 Pour obtenir le schéma du filtre passe bande répondant au gabarit imposé (Figure 2), il faut faire la transposition passe bas → passe bande ainsi que la dénormalisation pour revenir à $f_0 = 97,488\,MHz$ et pour une impédance de source de $50\,\Omega$.

Passe bas	Passe haut	Passe bande	coupe bande
r	r	r	r
γ	$1/\gamma$	$\gamma/\Delta\Omega$; $\dfrac{\Delta\Omega}{\gamma}$	$\Delta\Omega\gamma$; $\dfrac{1}{\Delta\Omega\gamma}$
ℓ	$1/\ell$	$\dfrac{\Delta\Omega}{\ell}$; $\dfrac{\ell}{\Delta\Omega}$	$\Delta\Omega\ell$; $\dfrac{1}{\Delta\Omega\ell}$

Schéma du filtre passe bande



Valeurs des composants :

	R_e	L_1	C_1	L_2	C_2	C_3	L_3	R_s
Passe bande $\Omega_0 = 1$ normalisé	1	7,78104	0,12852	0,18706	5,34578	0,12852	7,78104	1
Passe bande $F_0 = 97,488\,MHz$	1 Ω	12,7 nH	209,8 pF	305,4 pH	8,73 nF	209,8 pF	12,7 nH	1 Ω
Passe bande $F_0 = 97,488\,MHz$	50 Ω	635 nH	4,2 pF	15,27 nH	174,5 pF	4,2 pF	635 nH	50 Ω

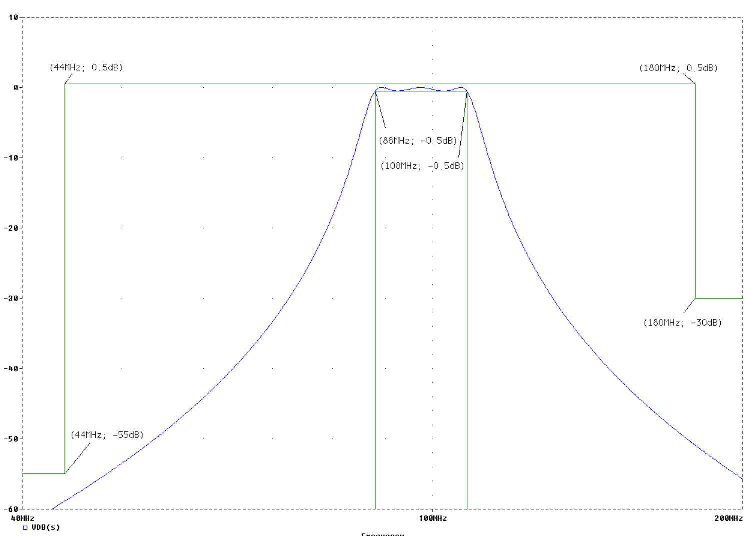
$$\ell = \frac{L\omega_0}{R} \qquad \gamma = R\,C\,\omega_0$$

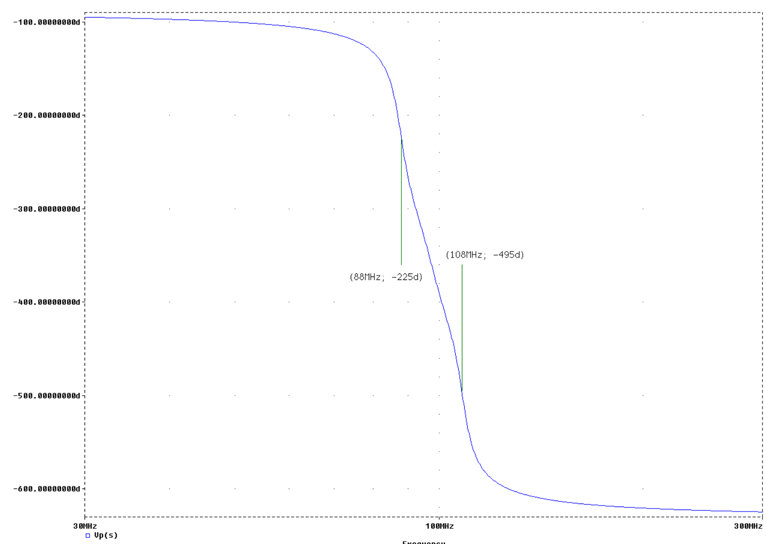
$$L = \frac{R\ell}{\omega_0} \qquad C = \frac{\gamma}{R\omega_0}$$

avec $\omega_0 = 2\pi f_0$

et R impedance de la source

2.2.4





2.2.5

le gain G_{p1} est bien respecté car le gabarit a été modifié (G_{p2} a été ramené à 0dB) sans augmenter l'ordre du filtre

24/06/2006

3. Exercice 2 : modulation

3.1 La modulation d'amplitude

3.1.1 modulation sans porteuse

$Se(t) = k_e\, m(t) \cdot pe(t)$ $\quad k_e = 1 \quad m(t) = M_0 + M\cos(\omega_m t)$

$pe(t) = \cos(\omega_p t)$

$$Se(t) = (M_0 + M\cos(\omega_m t)) \cdot \cos(\omega_p t)$$

$$Se(t) = M_0 \cos(\omega_p t) + \frac{M}{2}\left[\cos((\omega_p - \omega_m)t) + \cos((\omega_p + \omega_m)t)\right]$$

la modulation est dite sans porteuse si le terme $\cos(\omega_p t)$ est nul donc si $M_0 = 0$.

3.1.2 démodulation synchrone

a. le canal de transmission étant considéré parfait,

$e_r(t) = S_e(t)$ $\quad k_r = 1.$

$y_r(t) = k_r\, e_r(t) \cdot p_r(t)$ $\quad p_r(t) = \cos(\omega_{pr} t + \phi_r)$

$$Y_r(t) = \frac{M}{2}\left[\cos((\omega_p - \omega_m)t) + \cos((\omega_p + \omega_m)t)\right] \cdot \cos(\omega_{pr} t + \phi_r)$$

b. dans le cas ou $\omega_{pr} = \omega_p$ et $\phi_r = 0$, $y_r(t)$ s'écrit :

$$Y_r(t) = \frac{M}{2}\left[\cos((\omega_p - \omega_m)t) \cdot \cos(\omega_p t) + \cos((\omega_p + \omega_m)t) \cdot \cos(\omega_p t)\right]$$

$$= \frac{M}{4}\left[\cos((\cancel{\omega_p} - \cancel{\omega_p} + \omega_m)t) + \cos((\omega_p + \omega_p - \omega_m)t)\right.$$

$$\left. + \cos((\cancel{\omega_p} - \cancel{\omega_p} - \omega_m)t) + \cos((\omega_p + \omega_p + \omega_m)t)\right]$$

$$= \frac{M}{4}\left[2\cos(\omega_m t) + \cos((2\omega_p - \omega_m)t) + \cos((2\omega_p + \omega_m)t)\right]$$

$$Y_r(t) = \frac{M}{2}\cos(\omega_m t) + \frac{M}{4}\left[\cos((2\omega_p - \omega_m)t) + \cos((2\omega_p + \omega_m)t)\right]$$

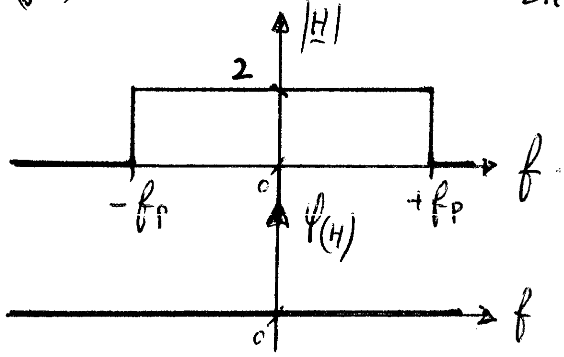
Pour obtenir en sortie du bloc 1, le signal $m(t)$, il faut que $s_r(t) = m(t)$.

Pour cela le bloc 1 doit supprimer les composantes $\cos((2\omega_p - \omega_m)t)$ et $\cos((2\omega_p + \omega_m)t)$, et avoir un gain de 2.

Le bloc 1 doit être un filtre passe bas

exemple dans le cas d'un filtre parfait :

$$\begin{cases} \underline{H}(j\omega) = 2 & |f| < \frac{\omega_p}{2\pi} = f_p \\ \underline{H}(j\omega) = 0 & |f| \geq \frac{\omega_p}{2\pi} = f_p \end{cases}$$



3.1.3 influence des erreurs

a. $\omega_{pr} = \omega_p$ $\quad \phi_r$ quelconque.

$$Y_r(t) = \frac{M}{2}\left[\cos((\omega_p - \omega_m)t) \cdot \cos(\omega_p t + \phi_r) + \cos((\omega_p + \omega_m)t) \cdot \cos(\omega_p t + \phi_r)\right]$$

$$= \frac{M}{4}\left[\cos(\omega_m t + \phi_r) + \cos((2\omega_p - \omega_m)t + \phi_r) + \cos(-\omega_m t + \phi_r) + \cos((2\omega_p + \omega_m)t + \phi_r)\right]$$

en sortie du filtre (Bloc 1), on obtient

$$s_r(t) = \frac{M}{2}\left[\cos(\omega_m t + \phi_r) + \cos(-\omega_m t + \phi_r)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$s_r(t) = \underbrace{M \cdot \cos(\omega_m t)}_{= m(t)} \cdot \cos(\phi_r)$$

$$s_r(t) = m(t) \cdot \cos\phi_r$$

→ $\phi_r = 0$ $\quad s_r(t) = m(t)$ le cas ideal.

→ $\phi_r = \pm\frac{\pi}{2}$ $\quad s_r(t) = 0$ il n'y a plus de signal en sortie du récepteur.

24/06/2006

→ $\phi_r \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ et constant

l'amplitude du signal dépend de l'erreur de phase ϕ_r

→ dans le cas ou l'erreur de phase ϕ_r dépend du temps, le signal $s_r(t)$ se retrouve modulé en amplitude.

$$s_r(t) = m(t) \cdot \cos(\phi_r(t))$$

si l'erreur de phase est aléatoire, $s_r(t)$ est modulé en amplitude de façon aléatoire, il est donc inutilisable.

b. - la modulation d'amplitude avec porteuse ne résout pas cet inconvénient.

c. - $\phi_r = 0$ et $\omega_{pr} = \omega_p \mp \Delta_\omega$

$$Y_r(t) = \frac{M}{2}\left[\cos((\omega_p - \omega_m)t) \cdot \cos(\omega_{pr} t) + \cos((\omega_p + \omega_m)t) \cdot \cos(\omega_{pr} t)\right]$$

$$= \frac{M}{4}\Big[\cos((\omega_{pr} - \omega_p + \omega_m)t) + \cos((\omega_{pr} + \omega_p - \omega_m)t) + \cos((\omega_{pr} - \omega_p - \omega_m)t) + \cos((\omega_{pr} + \omega_p + \omega_m)t)\Big]$$

en sortie du filtre (bloc 1), on obtient

$$s_r(t) = \frac{M}{2}\left[\cos((\omega_{pr} - \omega_p + \omega_m)t) + \cos((\omega_{pr} - \omega_p - \omega_m)t)\right]$$

$$= \frac{M}{2}\left[\cos((\mp \Delta_\omega + \omega_m)t) + \cos((\mp \Delta_\omega - \omega_m)t)\right]$$

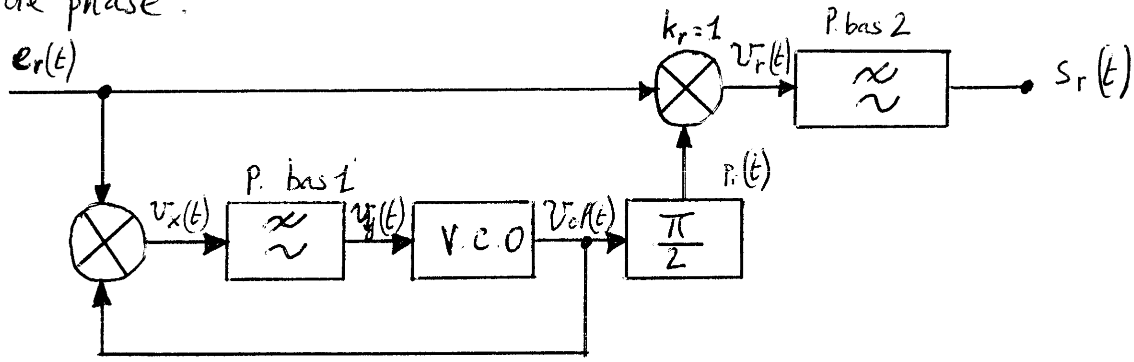
$$s_r(t) = \underbrace{M \cos(\omega_m t)}_{m(t)} \cdot \cos(\Delta_\omega t)$$

$$s_r(t) = m(t) \cdot \cos(\Delta_\omega t)$$

On se retrouve également dans le cas d'une modulation d'amplitude à basse fréquence (Δ_ω est très faible).

Ce phénomène est appelé battement.

d. comme nous l'avons vu dans les questions précédentes, la fréquence et la phase de l'oscillateur local ont une grande importance dans la démodulation synchrone. Une solution consiste à utiliser une boucle à verrouillage de phase.



$e_r(t) = k_e\ m(t) \cdot \cos(\omega_p t)$ avec $m(t) = M_0 + M \cos(\omega_m t)$ et $k_e = 1$

$v_{ol}(t) = P \cos(\omega_{Pr} t + \varphi)$ avec $\omega_{Pr} = \omega_p$

$v_x(t) = k_e \cdot m(t)\ P \cos(\omega_p t) \cdot \cos(\omega_{Pr} t + \varphi) = \frac{k_e \cdot P \cdot m(t)}{2}\left[\cos(2\omega_{Pr} t + \varphi) + \cos\varphi\right]$

après filtrage passe bas, le terme en $2.\omega_{Pr}$ est supprimé

donc $v_y(t) = \frac{k_e \cdot P \cdot m(t)}{2} \cdot \cos\varphi$

La boucle à verrouillage de phase (PLL) est verrouillée lorsque $v_y(t)$ ne dépend plus de $m(t)$ (le signal modulant) donc lorsque $\cos\varphi = 0$, soit lorsque $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$ rd.

$v_y(t) = 0$, la fréquence en sortie du VCO est constante.

$v_{ol}(t) = P \cdot \cos\left(\omega_{Pr} t - \frac{\pi}{2}\right)$

$P_r(t) = P \cos\left(\omega_{Pr} t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = P \cos(\omega_{Pr} t)$ $\omega_p = \omega_{Pr}$

$$v_r(t) = k_r e_r(t) \times P_r(t) = k_r k_e m(t) \cdot \cos(\omega_p t) \cdot P \cos(\omega_p t)$$

$$= \frac{k_r k_e \cdot m(t) \cdot P}{2}\left[\cos(\omega_p t - \omega_p t) + \cos(\omega_p t + \omega_p t)\right]$$

$$v_r(t) = \frac{k_r k_e \cdot m(t) \cdot P}{2} + \frac{k_r k_e \cdot m(t)\ P}{2} \cos(2\omega_p t)$$

après filtrage passe bas, le terme en $2\omega_p$ est supprimé, on obtient $s_r(t) = \frac{k_r k_e P}{2} \cdot m(t)$. En choisissant $P = 2$ avec $k_r = k_e = 1$ on retrouve bien le signal $m(t)$ en sortie du démodulateur.

3.2 La modulation de fréquence.

$$v(t) = 17 \cdot \cos\left(2\pi \cdot 103{,}7 \cdot 10^6 \cdot t + 5 \cdot \sin(3554{,}3 \cdot t)\right)$$

a. l'amplitude V_0 du signal $v(t)$ est : 17 volts.
l'amplitude P_0 de la porteuse $p(t)$ est : 17 volts.

b. la fréquence de la porteuse est : $f_p = 103{,}7\ MHz$.

c. la fréquence du signal modulant est : $f_m = \frac{3554{,}3}{2\pi} = 565{,}7\ Hz$.

d. l'indice de modulation β est : 5.

e. l'excursion en fréquence Δf est donnée par la relation : $\Delta F = \beta \times f_m = 5 \times 565{,}7 = 2828{,}4\ Hz$.

f. la largeur spectrale (B_v) du signal $v(t)$ est donnée de façon approchée par la relation de Carson.

$$\boxed{B_v = 2(\beta + 1)\, f_m = 2(\Delta F + f_m)}$$

$$B_v = 2(5+1) \cdot 565{,}7 = 6788{,}2\ Hz.$$

g. Un signal modulé en fréquence s'écrit

$$v(t) = P_0 \cos\left(\omega_p t + 2\pi k \int m(t) \cdot dt\right)$$

$$2\pi k \int m(t) \cdot dt = 5 \sin(3554{,}3 t)$$

$$\int m(t) \cdot dt = \frac{5}{2\pi k} \sin(3554{,}3 \cdot t)$$

$$m(t) = \frac{5}{2\pi k} \cdot \frac{d\left(\sin(3554{,}3 \cdot t)\right)}{dt} = \frac{5 \times 3554{,}3}{2\pi k} \cos(3554{,}3 t)$$

avec $k = 4000 \cdot Hz \cdot V^{-1}$, on obtient $m(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(2\pi \cdot f_m \cdot t)$