Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

Conseils :

- Bien lire l'ensemble du sujet avant de commencer à répondre
- Reprendre la numérotation des questions et encadrer vos résultats
- En fin de devoir, numéroter vos copies (1/n à n/n, avec n : nombre de copies)

Les questions des chapitres 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1- Questions de cours (21 points)

1-1- Quelle est la définition :

1-1-1. d'un signal déterministe

1-1-2. d'un signal aléatoire ?

1-1-3. d'un système causal ?

1-1-4. d'un système stable ?

1-1-5. du théorème de Parseval ?

1-1-6. d'un signal stationnaire au sens large ?

1-1-7. de l'ergodicité ?

1-2- Les signaux aléatoires sont modélisés en utilisant les outils mathématiques associés aux statistiques et probabilités.

1-2-1. Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, que représente $E(X^k)$ défini par l'Équation 1 ?

1-2-2. Pour k = 1 dans l'Équation 1, donner l'autre nom de l'espérance mathématique E(X).

$$E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_{X(x)} dx \qquad \text{Équation 1}$$

1-2-3. Donner l'expression de la variance notée Var(X).

1-2-4. Comment calcule-t-on l'écart type (σ) ?

1-3- Soit le Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT : Figure 1)

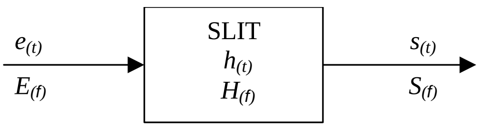


Figure 1

Soit :

$e_{(t)}$ le signal temporel d'entrée,

$s_{(t)}$ le signal temporel de sortie,

$h_{(t)}$ la réponse impulsionnelle du SLIT,

et $E_{(f)}$, $S_{(f)}$ et $H_{(f)}$ les transformées de Fourier respectivement de $e_{(t)}$, $s_{(t)}$ et $h_{(t)}$.

1-3-1. Ecrire la relation qui lie la sortie $s_{(t)}$ aux grandeurs $e_{(t)}$ et $h_{(t)}$.

1-3-2. Comment appelle-t-on cette fonction ?

1-3-3. Ecrire la fonction de transfert qui lie $H_{(f)}$ aux grandeurs $E_{(f)}$ et $S_{(f)}$.

1-4- Fonction de transfert :

La fonction de transfert d'un Système Linéaire Invariant dans le Temps s'écrit avec la notation complexe de Laplace, comme le rapport de deux polynômes (Équation 2).

$$H_{(p)} = \frac{N_{(P)}}{D_{(P)}} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + \ldots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4 + \ldots + b_m p^m} \qquad \text{Équation 2}$$

1-4-1. Pourquoi le degré du numérateur (n) doit-il être inférieur ou égal au degré du dénominateur (m) ?

1-4-2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le système ayant $H_{(p)}$ comme fonction de transfert soit stable ?

1-4-3. Soit un SILT (filtre passe bas du deuxième ordre) dont la fonction de transfert H(p) est donnée par l'Équation 3

$$H_{(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{w_0} p + \left(\frac{1}{w_0} p\right)^2} \qquad \text{Équation 3}$$

Quelle précaution doit-on prendre sur la valeur des paramètres m et w_0 pour que ce filtre soit stable ?

Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

1-5- Transformée de Laplace

1-5-1. Calculer l'original $h_{1(t)}$ et $h_{2(t)}$ (transformée de Laplace inverse) des fonctions $H_{1(p)}$ et $H_{2(p)}$ suivantes :

$$H_{1(p)} = \frac{k}{p+a} \qquad H_{2(p)} = \frac{k(\omega\cos\varphi + (p+a)\sin\varphi)}{(p+a)^2 + \omega^2} \qquad \text{Équation 4}$$

1-5-2. En utilisant les deux réponses impulsionnelles ($h_{1(t)}$ et $h_{2(t)}$) obtenues ci-dessus, compléter le graphique (Figure 2) dans les 6 cas possibles (*utiliser le graphique de la feuille de réponse et le joindre à vos copies*).

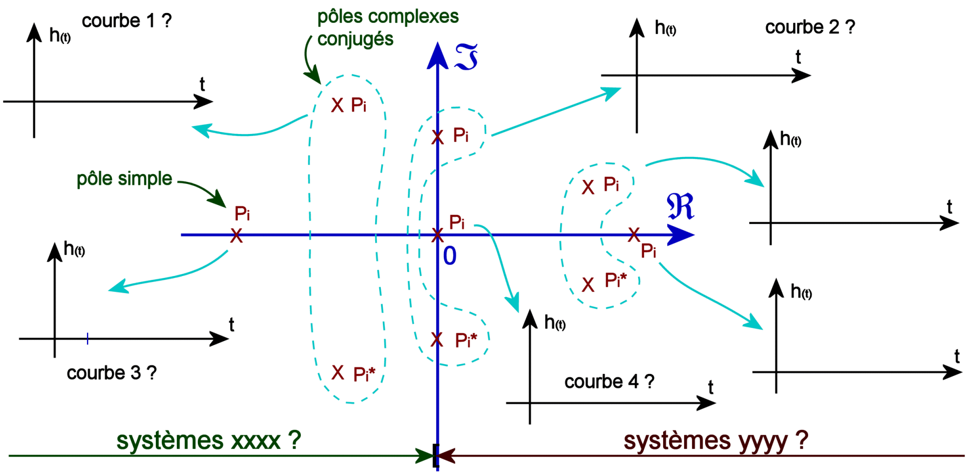


Figure 2 : Pôles dans le plan complexe

1-5-3. Donner les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.

2- Exercice 1 : Signal aléatoire (11 points)

2-1- Soit une variable aléatoire X définie par sa fonction de densité de probabilité $f_{X(x)}$.

$$f_{X(x)} = \begin{cases} k & pour \quad a \le x \le b \\ 0 & pour \quad x < a \quad ou \quad b < x \end{cases} \quad \text{avec k constant} \qquad \text{Équation 5}$$

2-1-1. Déterminer la valeur de k.

2-1-2. Pour a = $-\pi$ et b = $+\pi$, calculer k puis représenter $f_{X(x)}$.

2-1-3. Calculer la fonction de répartition $F_{X(x)}$.

2-1-4. Représenter $F_{X(x)}$.

2-2- Soit un processus aléatoire $X_{(t)}$ défini par l'Équation 6

$$X_{(t)} = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{Équation 6}$$

Avec A et ω constants et φ une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle [$-\pi$; $+\pi$].

2-2-1. Calculer l'espérance mathématique de $X_{(t)}$.

2-2-2. Calculer l'autocorrélation notée $R_{XX(\tau)}$ de $X_{(t)}$.

2-2-3. Que représente l'autocorrélation en zéro (notée $R_{XX(0)}$) de $X_{(t)}$.

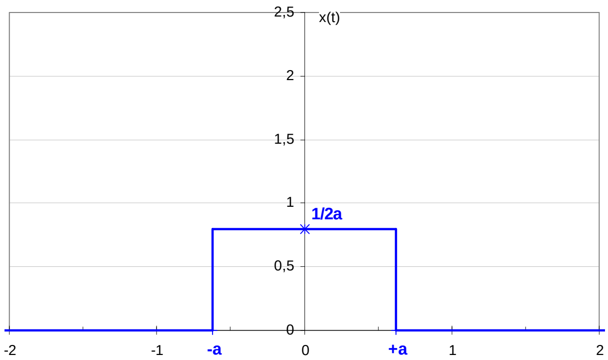
2-2-4. Le signal $X_{(t)}$ est-il stationnaire au sens large ?

3- Exercice 2 : Filtre et transformée de Fourier (15 points)

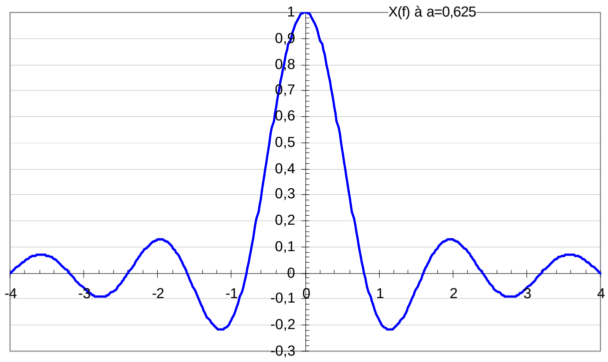
Rappel : Il a été démontré en cours que la transformée de Fourier X(f) d'une impulsion rectangulaire x(t) définie par l'Équation 7 est un sinus cardinal (Équation 8)

$$x_{(t)} = \begin{cases} \frac{1}{2a} & pour \quad |t| \le a \\ 0 & pour \quad |t| > a \end{cases} \qquad \text{Équation 7}$$

$$X_{(f)} = \frac{\sin(2paf)}{2paf} \qquad \text{Équation 8}$$



TF
⇒



3-1- Représenter l'allure du module et de la phase de H(f), la fonction de transfert du SLIT donnée par l'Équation 9.

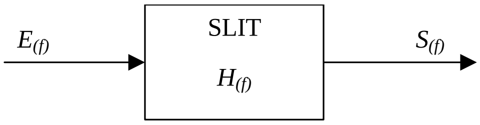


Figure 3

$$H_{(f)} = k.e^{-j2pft} \qquad \text{pour } | f | \le F_1$$

$$H_{(f)} = 0 \qquad \text{pour } | f | > F_1$$

Équation 9
(filtre passe bas parfait)

3-2- En s'aidant de l'Équation 8 et des propriétés de la transformée de Fourier, donner l'expression h(t) de la réponse impulsionnelle du SLIT (Figure 3), dont la fonction de transfert H(f) est donnée par l'Équation 9.

3-3- Représenter l'allure de la réponse impulsionnelle h(t).

3-4- Expliquer pourquoi ce filtre passe bas (parfait) n'est pas physiquement réalisable.

3-5- Calculer la fonction de transfert $H_{T(f)}$ du SLIT représenté par la Figure 4, et composé par deux SLIT ($H_{A(f)}$ F_{1A} et $H_{B(f)}$ F_{1B}) définis par l'Équation 9, avec F_{1B} inférieure à F_{1A}.

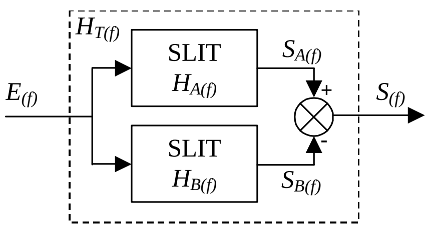


Figure 4

3-6- Représenter le module de $H_{T(f)}$ et expliquer pourquoi ce SLIT est appelé filtre passe bande.

3-7- En se basant sur le même principe de construction que $H_{T(f)}$, calculer la réponse impulsionnelle $h_{T(t)}$.

Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

Nom : .... Prénom : .... copie n° …/…

Exercice 1-5-2