29-04-2006

Traitement Analogique du Signal - ELE 103

Correction du partiel du samedi 29 avril 2006

1. Questions de cours

1.1 Définitions

1.1.1 Signal déterministe :

Il est modélisable par une fonction représentant l'évolution de son amplitude en fonction du temps. Sa valeur est définie de façon certaine à tout instant.

Un signal déterministe peut être constant (une tension continue) ou variable (signal périodique : le secteur EDF 230 volts • 50 Hz, ou impulsionnel).

1.1.2 Signal aléatoire :

Par définition, un signal aléatoire ne peut pas être connu de façon certaine, il y a une part de hasard.

Un signal aléatoire peut être transitoire ou permanent. Dans le cas d'un signal aléatoire permanent, il peut être décrit par des modèles mathématiques utilisant les lois de probabilité. Il est défini par sa valeur moyenne et sa variance. L'information est généralement inconnue par celui qui la reçoit, sinon elle ne présente pas d'intérêt. Il s'agit donc d'un signal aléatoire.

1.1.3 système Causal :

Un système est causal si sa réponse à l'instant t_0 ne dépend que des excitations aux instants t avec $t \leq t_0$

Autrement dit, l'évolution de la sortie dépend de l'évolution passée de l'entrée, ou la cause précède l'effet.

La réponse impulsionnelle $h(t) = 0$ pour $t < 0$.

1.1.4 Un système stable.

Un système est dit stable, s'il revient toujours à son point de repos après un certain temps lorsqu'il a été excité par une perturbation transitoire.

- la réponse impulsionnelle $h(t)$ tend vers 0 lorsque le temps (t) tend vers l'infini.

$$h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système soit stable.

  tous les pôles de la fonction de transfert $H(p)$ doivent être à partie réelle négative.

1.1.5 Théorème de Parseval.

L'énergie totale d'un signal ne dépend pas du mode de représentation choisie (représentation temporelle : $x(t)$ ou représentation fréquentielle : $X(f)$).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 \, df$$

$|x(t)|^2$ est la puissance de $x(t)$.

$|X(f)|^2$ est la densité spectrale énergétique

1.1.6 Signal stationnaire au sens large.

Un signal aléatoire est dit stationnaire au sens large si.

- sa moyenne est constante en fonction du temps (t).

moment d'ordre 1

$$E[x(t)] = E[x(t-t_0)] = m$$

- sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence temporelle τ et non du temps (t).

moment d'ordre 2.

$$E[x(t) \cdot x(t-\tau)] = E[x(t-t_0) \cdot x(t-t_0-\tau)] = R_{xx}(\tau)$$

29-04-2006

1.1.7 Ergodicité :

Un processus aléatoire est dit ergodique si les moyennes temporelles sont identiques aux moyennes statistiques

$$E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) . p(x) \, dx \qquad \text{moyenne statistique.}$$

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) . dt \qquad \text{moyenne temporelle.}$$

soit :

$$E[x(t)] = \langle x(t) \rangle$$

et

$$E[x^2(t)] = \langle x^2(t) \rangle$$

Tester l'ergodicité d'un signal aléatoire est généralement très difficile (il faut connaitre $\lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) \, dt$).
Il est généralement admis dans les systèmes de communication de considérer les signaux aléatoires, comme ergodiques au niveau de la moyenne et de l'autocorrélation.

1.2 Les signaux aléatoires

1.2.1 Dans le cas d'une variable aléatoire continue X,
$E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k . f_{X(x)} \, dx$ représente le <u>moment d'ordre k</u>

1.2.2 lorsque $k = 1$, $E(X)$ est le moment d'ordre 1 ou espérance mathématique. Il s'agit de la <u>moyenne</u>.

1.2.3 <u>la variance</u> notée $Var(X)$ est égale à :

$$\boxed{Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E\left[(X - E(X))^2\right]}$$

nota : • lorsque la variable aléatoire X est centrée (moyenne $= 0$), la variance est égale au moment d'ordre 2

• la variance donne la dispersion de la variable aléatoire autour de la moyenne.

1.2.4 l'écart type σ.

$$\boxed{\sigma_{(x)} = \sqrt{Var(x)}}$$

1.3 Système Linéaire Invariant dans le Temps

1.3.1 $s(t) = e(t) * h(t)$ produit de convolution.

$$\boxed{s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\theta) \cdot h(t-\theta)\, d\theta}$$

1.3.2 La sortie $s(t)$ d'un SLIT est donnée par le produit de convolution du signal d'entrée $e(t)$ par la réponse impulsionnelle $h(t)$.

1.3.3 la fonction de transfert:

$$\boxed{H(f) = \frac{S(f)}{E(f)}}$$

1.4 Fonction de transfert:

1.4.1

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \cdots + b_m p^m}$$

Il est toujours possible de développer la fonction de transfert $H(p)$ en une somme de fractions dont le dénominateur ne contient que des pôles réels ou des pôles complexes conjugués et des termes en $p, p^2, p^3 \dots p^{n-m}$.

$$H(p) = \alpha_{n-m} p^{n-m} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0 + \sum_i \frac{R_i}{p - p_i} + \sum_j \frac{A_j p + B_j}{p^2 + \beta_j p + \omega_j^2}$$

> Dans un système réel, n doit être inférieur ou égal à m afin de ne pas avoir de terme en $\alpha_{n-m} p^{n-m}$ qui représentent les dérivés $(n-m)$ d'une impulsion de dirac qui n'ont pas de signification physique.

Rappel: $\mathcal{L}^{-1}[p^n] = \dfrac{d^n \delta(t)}{dt^n}$

1.4.2 La condition nécessaire et suffisante pour que le système ayant $H(p)$ comme fonction de transfert soit stable est :

> Tous les pôles de $H(p)$ doivent être à partie réelle négative.

<u>Rappel</u> :
- les pôles de $H(p)$ correspondent aux valeurs de p qui annulent le dénominateur.
- le critère de Routh permet de vérifier la stabilité d'une fonction de transfert sans avoir besoin de calculer tous les pôles de la fonction.

1.4.3 La fonction de transfert d'un filtre passe bas du 2ème ordre est donnée par : $H(p) = \dfrac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$

Pour que ce système soit stable, il faut que tous les pôles soient à partie réelle négative. Il faut donc calculer : $1 + 2m \frac{p}{\omega_c} + \left(\frac{p}{\omega_c}\right)^2 = 0$ Rappel : $ax^2 + bx + c = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$a = \dfrac{1}{\omega_c^2}$ $b = \dfrac{2m}{\omega_c}$ $c = 1$.

$\Delta = \dfrac{4}{\omega_c^2}(m^2 - 1)$

$$p_i = \frac{-\frac{2m}{\omega_c} \pm \frac{2}{\omega_c}\sqrt{m^2-1}}{\frac{2}{\omega_c}} = -m \pm \sqrt{m^2-1} = -m \pm \sqrt{(m-1)(m+1)}$$

m	$\lvert m \rvert \geqslant 1$	$m \in [-1;+1]$	$m = 0$
$\sqrt{(m-1)(m+1)}$	$\sqrt{m^2-1}$	$\sqrt{j^2(1-m^2)}$ $= j\sqrt{1-m^2}$	$\sqrt{-1}$ $= j$
p_1	$-m + \sqrt{m^2-1}$	$-m + j\sqrt{1-m^2}$	$+j$
p_2	$-m - \sqrt{m^2-1}$	$-m - j\sqrt{1-m^2}$	$-j$
$\Re(p_i)$	$-m \pm \sqrt{m^2-1}$	$-m$	0

$$\text{signe}\left(\Re(p_i)\right) = -\ \text{signe}(m).$$

la condition de stabilité de $H(p)$: il faut que m soit positif. Il n'y a pas de contrainte sur ω_0.

$$\boxed{m > 0}$$

utilisation du critère de **Routh**:

p^2	$\frac{1}{\omega_0^2}$		
p^1	$\frac{2m}{\omega_0}$	0	
p^0	$\frac{1\times\frac{2m}{\omega_0} - 0\times\frac{1}{\omega_0^2}}{\frac{2m}{\omega_0}} = 1$	$\frac{0\times\frac{2m}{\omega_0} - 0\times\frac{1}{\omega_0^2}}{\frac{2m}{\omega_0}} = 0.$	

Pour que le système soit stable, il faut que tous les termes de la 1ère colonne soient de même signe.

soit $\text{signe}\left(\frac{1}{\omega_0^2}\right) = \text{signe}\left(\frac{2m}{\omega_0}\right) = \text{signe}(+1)$

donc $m > 0$

1.5 Transformée de Laplace

1.5.1 $H_1(p) = \frac{k}{p+\alpha}$

$$\boxed{h_1(t) = k.e^{-\alpha t}}$$

en utilisant les propriétés des transformées de Laplace et les tables des transformées usuelles, on obtient facilement l'original de $H_1(p)$ et $H_2(p)$.

$\mathcal{L}[\alpha\, x(t)] = \alpha\, \mathcal{L}[x(t)] = \alpha . X(p)$ linéarité

$$\mathcal{L}\left[e^{-\alpha t}\right] = \frac{1}{p+\alpha}.$$

29-04-2006

$$H_2(p) = \frac{k\left(\omega \cos\varphi + (p+\alpha)\sin\varphi\right)}{(p+\alpha)^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[\sin(\omega t + \varphi)\right] = \frac{p \sin\varphi + \omega\cos\varphi}{p^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{-at} \cdot \sin(\omega t)\right] = \frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

$$\boxed{h_2(t) = k \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$$

1.5.2

- Pôle simple : $H_1(p)$.

$p + \alpha = 0 \Rightarrow p_i = -\alpha$

$\alpha > 0$ système stable : $\lim\limits_{t \to +\infty} h_1(t) = 0$.

$\alpha = 0$ limite de stabilité : $\lim\limits_{t \to +\infty} h_1(t) = k$.

$\alpha < 0$ instable : $\lim\limits_{t \to +\infty} h_1(t) \to +\infty$

- Pôle double : complexes conjugués.

$(p+\alpha)^2 + \omega^2 = 0 \Longrightarrow (p+\alpha)^2 = -\omega^2 = (j\omega)^2$.

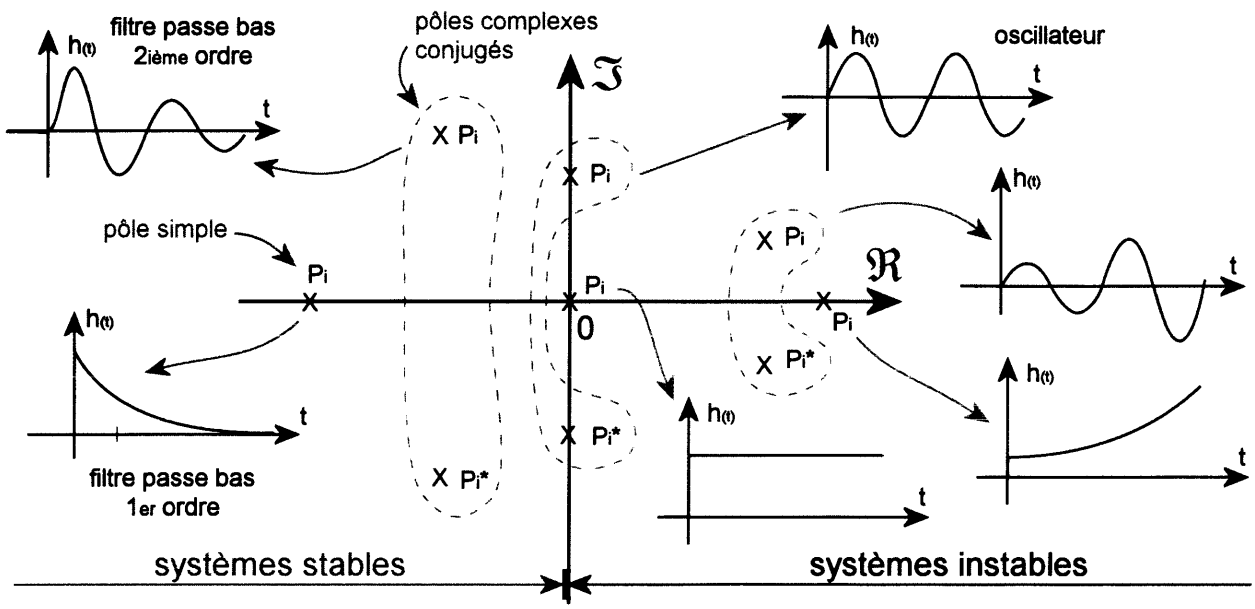
$p + \alpha = \pm j\omega$.

$p_i = -\alpha \pm j\omega$

$\alpha > 0$ système stable : $\lim\limits_{t \to +\infty} h_2(t) = 0$.

$\alpha = 0$ système instable (oscillateur) : $\lim\limits_{t \to +\infty} h_2(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$

$\alpha < 0$ système instable : $\lim\limits_{t \to +\infty} h_2(t) \to \pm\infty$



1.5.3 théorème de la valeur initiale

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} p \cdot F(p) = f(0^+)}$$

théorème de la valeur finale

$$\boxed{\lim_{p \to 0} p \cdot F(p) = \lim_{t \to +\infty} f(t) = f(+\infty)}$$

2. Exercice 1 : signal aléatoire

2.1 X variable aléatoire de densité de probabilité $f_X(x)$.

$$f_X(x) = \begin{cases} k & \text{pour } x \in [a, b] \\ 0 & \text{pour } x \notin [a ; b] \end{cases} \qquad k = \text{constante}.$$

2.1.1 A partir des propriétés des fonctions de densité de probabilité, on obtient :

Rappel : $f_X(x) \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$$

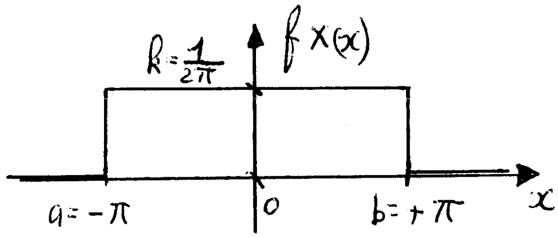
$$\underbrace{\int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dx}_{=0} + \underbrace{\int_{a}^{b} k \cdot dx}_{k \int_a^b dx} + \underbrace{\int_{b}^{+\infty} 0 \cdot dx}_{=0} = 1.$$

$$k \int_a^b dx = 1 \qquad k \left[x\right]_a^b = 1. \qquad k(b-a) = 1.$$

$$\boxed{k = \frac{1}{b-a}}$$

2.1.2 on donne $a = -\pi$ et $b = +\pi$

$$\boxed{k = \frac{1}{2\pi}}$$



2.1.3 Fonction de répartition.

$$f_X(x) = \frac{d F_X(x)}{dx}.$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\theta) \cdot d\theta$$

Pour $x < a$, $F_X(x) = 0$.

Pour $x \in [a ; b]$, $F_X(x) = \int_a^x k \, d\theta = k[\theta]_a^x = k(x-a)$

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

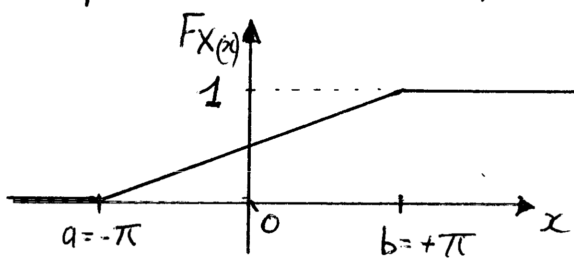
pour $x > b$, $F_X(x) = \int_a^b k\,d\theta + \underbrace{\int_b^{+\infty} 0 \, d\theta}_{=0.} = k\int_a^b d\theta = k(b-a)$

$$F_X(x) = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Pour $a = -\pi$ et $b = +\pi$, on obtient :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \notin [-\pi ; +\pi] \\ \dfrac{x-\pi}{2\pi} & \text{pour } x \in [-\pi ; +\pi] \end{cases}}$$

2.1.4 Représentation de $F_X(x)$



2.2

$X(t)$ processus aléatoire A et ω constantes.

$X(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ φ variable aléatoire uniforme sur $[-\pi, +\pi]$

2.2.1 Espérance Mathématique de $X(t)$.

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot f_X(x) \, dx$$

elle était rappelée dans l'enoncé de l'exercice 1.2.2.

Ici la variable aléatoire est φ, en faisant un changement d'écriture, il est possible de reprendre les résultats obtenus dans l'exercice 2.1.

on obtient alors la densité de probabilité $f\varphi(x)$

$$f\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{pour } -\pi \leq x \leq +\pi \\ 0 & \text{pour } |x| > \pi \end{cases}$$

$$E[X(t)] = \underbrace{\int_{-\infty}^{-\pi} X(t) \cdot 0 \, dx}_{=0} + \int_{-\pi}^{+\pi} X(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \, dx + \underbrace{\int_{+\pi}^{+\infty} X(t) \cdot 0 \, dx}_{=0}$$

$$E[X(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} X(t) \, dx = \frac{A}{2\pi} \underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\omega t + x) \, dx}_{=0}$$

$$\boxed{E[X(t)] = 0}$$

2.2.2 <u>autocorrélation.</u>

$$R_{xx}(\tau) = E[X(t) \cdot X(t-\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) \cdot X(t-\tau) \cdot f_{X(x)} \, dx$$

$$R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\omega t + x) \cdot \cos(\omega(t-\tau) + x) \, dx$$

$$= \frac{A^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2} \left(\cos(2\omega t + 2x - \omega\tau) + \cos(\omega\tau) \right) dx$$

Rappel : $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \left[\underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(2x + \omega(2t-\tau)) \, dx}_{=0} + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(\omega\tau) \, dx \right]$$

$$= \frac{A^2}{4\pi} \cos(\omega\tau) \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} dx = \frac{A^2 \cos(\omega\tau)}{4\pi} \cdot [x]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$= \frac{A^2 \cos(\omega\tau)}{4\pi} \cdot 2\pi$$

$$\boxed{R_{xx}(\tau) = \frac{A^2}{2} \cdot \cos(\omega\tau)}$$

29-04-2006

2.2.3 autocorrélation en $\tau = 0$.

$R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$ il s'agit de la puissance moyenne de $X(t)$.

$R_{XX}(0) = \frac{A^2}{2}$ cela correspond bien à la puissance normalisée moyenne d'un signal sinusoïdal d'amplitude A. $P_{moy} = (V_{eff})^2$

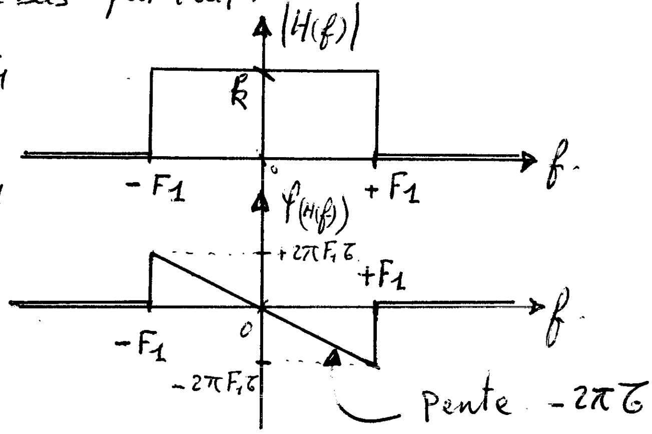
2.2.4

le signal $X(t)$ est de valeur moyenne nulle ($E[X(t)] = 0$) et la fonction d'autocorrélation ($R_{XX}(\tau)$) ne dépend que de τ. ces deux propriétés permettent de dire que $X(t)$ est stationnaire au sens large.

3. Exercice 2 : Filtre et transformée de Fourier.

3.1. Représentation du module et de la phase de la fonction de transfert d'un filtre passe bas parfait.

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_1 \\ k \cdot e^{-j2\pi f \tau} & \text{pour } |f| < F_1 \end{cases}$$



3.2 calcul de la réponse impulsionnelle $h(t)$ du filtre passe bas parfait.

Rappel :

- symétrie de la transformée de Fourier ou dualité : si $X(f) = TF[x(t)]$ alors $TF[X(t)] = x(-f)$
- linéarité :

$$TF[a\,x(t) + b\,y(t)] = a \cdot TF[x(t)] + b\, TF[y(t)] = a\,X(f) + b\,Y(f)$$

• le retard $TF[x(t-\tau)] = e^{-j2\pi f\tau} . X(f)$

Il est rappelé que la transformée de Fourier d'une impulsion $x(t)$ donne $X(f) = \dfrac{\sin(2\pi a f)}{2\pi a f}$

(1) $y(t) = A\,x(t)$. avec $y(t) = k \quad |t| \leqslant a$.

alors que $x(t) = \dfrac{1}{2a} \quad |t| \leqslant a$.

$$k = \frac{A}{2a} \Rightarrow A = 2ak.$$

$$Y(f) = TF[y(t)] = TF[A\,x(t)] = A\; TF[x(t)] = A . X(f)$$

$$Y(f) = A.X(f) = 2a.k.X(f) = 2ak\,\frac{\sin(2\pi a f)}{2\pi a f}$$

(2) on pose $a = F_1$.

$$Y(f) = 2F_1 k\,\frac{\sin(2\pi F_1 f)}{2\pi F_1 f}.$$

(3) $TF[Y(t)] = y(-f)$

$$Y(t) = 2F_1 k\,\frac{\sin(2\pi F_1 t)}{2\pi F_1 t}$$

$$y(-f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_1. \\ k & \text{pour } |f| \leqslant F_1. \end{cases}$$

cette fonction est paire donc $y(-f) = y(+f)$.

(4) on pose $z(t) = Y(t)$ et $Z(f) = y(f)$

$$z(t) = 2F_1 k\,\frac{\sin(2\pi F_1 t)}{2\pi F_1 t}$$

$$Z(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_1. \\ k & \text{pour } |f| \leqslant F_1 \end{cases}$$

(5) on pose $h(t) = z(t-\tau)$

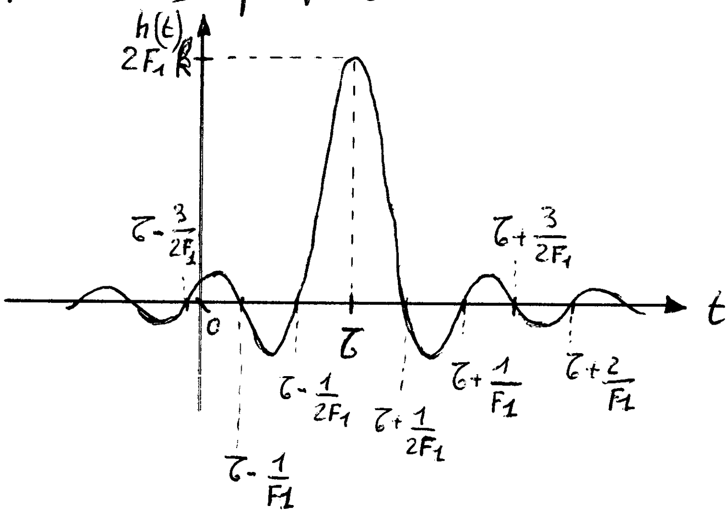
$$H(f) = TF[h(t)] = TF[z(t-\tau)] = e^{-j2\pi f\tau}.Z(f)$$

on obtient donc $H(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_1 \\ k.e^{-j2\pi f\tau} & \text{pour } |f| \leqslant F_1 \end{cases}$

et $h(t) = z(t-\tau) = 2F_1 k \dfrac{\sin(2\pi F_1(t-\tau))}{2\pi F_1(t-\tau)}$

$$\boxed{h(t) = 2F_1 k \frac{\sin(2\pi F_1(t-\tau))}{2\pi F_1(t-\tau)}}$$

3.3 Représentation de la réponse impulsionnelle d'un filtre passe bas parfait.



3.4 Ce filtre passe bas parfait n'est pas physiquement réalisable car il n'est pas causal. $h(t)$ n'est pas nulle pour $t < 0$.

3.5 Calcul de la fonction de transfert $H_T(f) = \dfrac{S(f)}{E(f)}$

$S(f) = S_A(f) - S_B(f)$

$S_A(f) = E(f) \cdot H_A(f)$

$S_B(f) = E(f) \cdot H_B(f)$

$S(f) = E(f) \cdot H_A(f) - E(f) \cdot H_B(f) = E(f)\left(H_A(f) - H_B(f)\right)$

$$\boxed{H_T(f) = \frac{S(f)}{E(f)} = H_A(f) - H_B(f)}$$

3.6

$$H_A(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_{1A} \\ k \cdot e^{-j2\pi f\tau} & \text{pour } |f| \leq F_{1A} \end{cases}$$

$$H_B(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_{1B} \\ k \cdot e^{-j2\pi f\tau} & \text{pour } |f| \leq F_{1B} \end{cases}$$

l'addition de deux nombres complexes n'est pas faisable sous la forme trigonométrique, il faut écrire $H_A(f)$ et $H_B(f)$ sous la forme algébrique.

$$H_A(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_{1A} \\ k\cos(-2\pi f \tau) + j\,k\sin(-2\pi f\tau) & \text{pour } |f| \leq F_{1A} \end{cases}$$

$$H_B(f) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |f| > F_{1B} \\ k\cos(2\pi f \tau) - j\,k\sin(2\pi f\tau) & \text{pour } |f| \leq F_{1B} \end{cases}$$

$F_{1B} < F_{1A}$

1er cas $\quad |f| \leq F_{1B} < F_{1A}$.

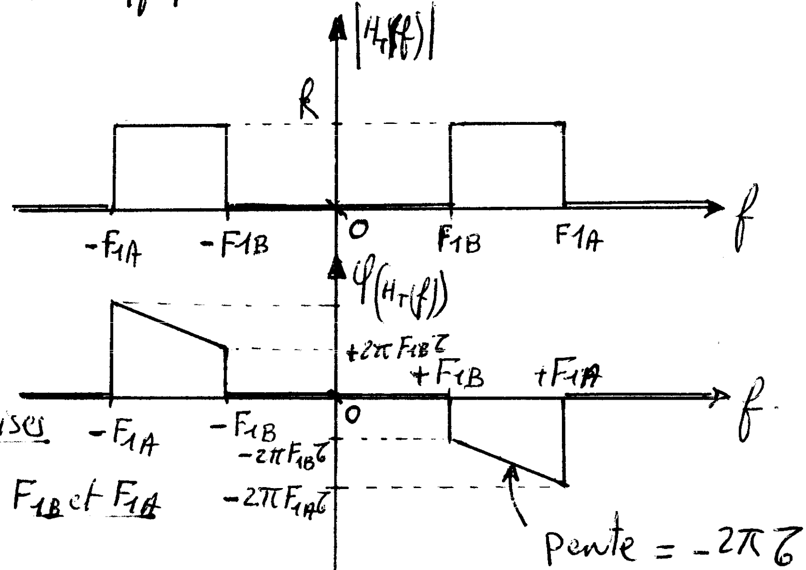
$$H_T(f) = 0$$

2ème cas $\quad F_{1B} < |f| \leq F_{1A}$

$$H_T(f) = k\cos(2\pi f\tau) - j\,k\sin(2\pi f\tau) = k.e^{-j2\pi f\tau}$$

3ème cas $\quad F_{1B} < F_{1A} < |f|$

$$H_T(f) = 0.$$



Ce SLIT est appelé filtre passe bande parfait car seul <u>les fréquences comprises dans la bande</u> entre F_{1B} et F_{1A} <u>sont transmises</u>

<u>3.7</u> Calcul de la réponse impulsionnelle $h_T(t)$ du filtre passe bande parfait.

$$h_T(t) = TF^{-1}[H_T(f)] = TF^{-1}[H_A(f) - H_B(f)]$$

$$h_T(t) = TF^{-1}[H_A(f)] - TF^{-1}[H_B(f)]$$

Propriété de linéarité.

29-04-2006

$$h_T(t) = h_A(t) - h_B(t)$$

en réutilisant les résultats obtenus à l'exercice 3.2, on obtient :

$$h_A(t) = 2F_{1A}\, k \, \frac{\sin\left(2\pi F_{1A}(t-\tau)\right)}{2\pi F_{1A}(t-\tau)}$$

et
$$h_B(t) = 2F_{1B}\, k \, \frac{\sin\left(2\pi F_{1B}(t-\tau)\right)}{2\pi F_{1B}(t-\tau)}$$

$$h_T(t) = \cancel{2}\cancel{F_{1A}}\, k \, \frac{\sin\left(2\pi F_{1A}(t-\tau)\right)}{\cancel{2}\pi \cancel{F_{1A}}(t-\tau)} - \cancel{2}\cancel{F_{1B}}\, k \, \frac{\sin\left(2\pi F_{1B}(t-\tau)\right)}{\cancel{2}\pi \cancel{F_{1B}}(t-\tau)}$$

on pose : $F_c = \frac{F_{1A}+F_{1B}}{2}$ et $BP = F_{1A} - F_{1B}$

Rappel : $\sin P - \sin Q = 2 \sin\left(\frac{P-Q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{P+Q}{2}\right)$

$$h_T(t) = \frac{k}{\pi(t-\tau)}\left(\sin\left(2\pi F_{1A}(t-\tau)\right) - \sin\left(2\pi F_{1B}(t-\tau)\right)\right)$$

$$= \frac{2k}{\pi(t-\tau)} \cdot \sin\left(\pi(t-\tau)(F_{1A}-F_{1B})\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi(t-\tau)(F_{1A}+F_{1B})}{2}\right)$$

$$= \frac{2k}{\pi(t-\tau)} \sin\left(\pi . BP . (t-\tau)\right) . \cos\left(2\pi F_c(t-\tau)\right)$$

$$\boxed{h_T(t) = \underbrace{2.BP.k}_{\text{terme constant}} . \underbrace{\frac{\sin\left(\pi.BP.(t-\tau)\right)}{\pi.BP.(t-\tau)}}_{\text{sinus cardinal}} . \underbrace{\cos\left(2\pi F_c(t-\tau)\right)}_{\text{signal sinusoïdal}}}$$

terme constant

sinus cardinal de période : $\frac{2}{BP}$

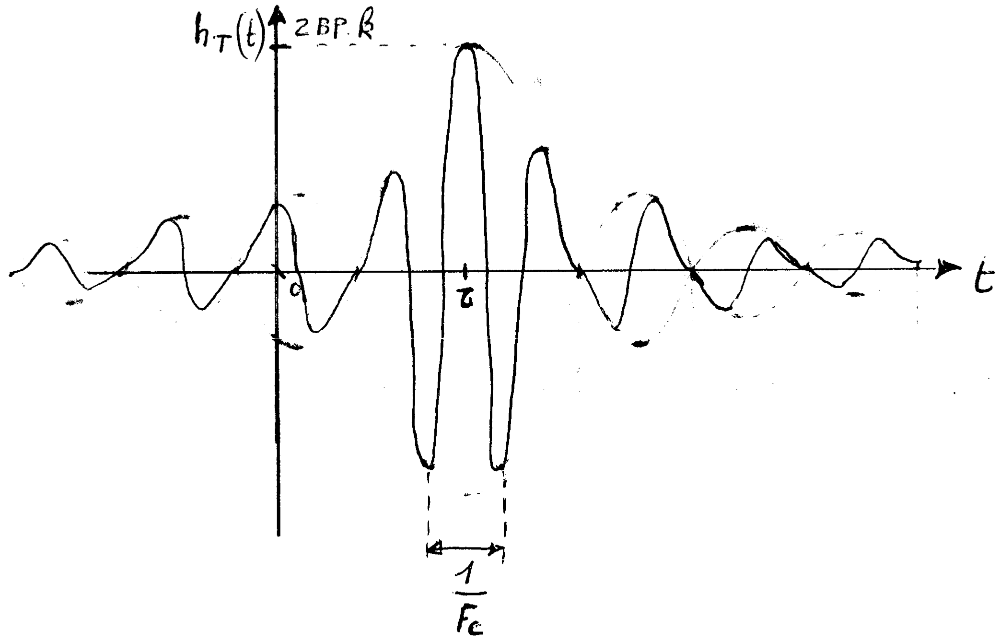
$\frac{BP}{2} = \frac{F_{1A}-F_{1B}}{2}$

et retardé de τ

signal sinusoïdal de fréquence F_c.

$F_c = \frac{F_{1A}+F_{1B}}{2}$.

et retardé de τ


$h_T(t)$
$2BP.k$
0
τ
t
$\frac{1}{F_c}$

Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

Conseils :
- Bien lire l'ensemble du sujet avant de commencer à répondre
- Reprendre la numérotation des questions et encadrer vos résultats
- En fin de devoir, numéroter vos copies (1/n à n/n, avec n : nombre de copies)

Les questions des chapitres 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1- Questions de cours (21 points)

1-1- Quelle est la définition :

1-1-1. d'un signal déterministe

1-1-2. d'un signal aléatoire ?

1-1-3. d'un système causal ?

1-1-4. d'un système stable ?

1-1-5. du théorème de Parseval ?

1-1-6. d'un signal stationnaire au sens large ?

1-1-7. de l'ergodicité ?

1-2- Les signaux aléatoires sont modélisés en utilisant les outils mathématiques associés aux statistiques et probabilités.

1-2-1. Dans le cas d'une variable aléatoire continue X, que représente $E(X^k)$ défini par l'Équation 1 ?

1-2-2. Pour k = 1 dans l'Équation 1, donner l'autre nom de l'espérance mathématique E(X).

$$E\left(X^k\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f_{X(x)} dx \qquad \text{Équation 1}$$

1-2-3. Donner l'expression de la variance notée Var(X).

1-2-4. Comment calcule-t-on l'écart type (σ) ?

1-3- Soit le Système Linéaire Invariant dans le Temps (SLIT : Figure 1)

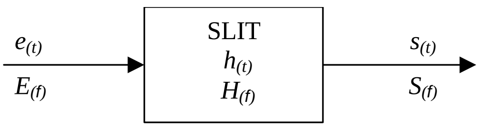


Figure 1

Soit :
- $e_{(t)}$ le signal temporel d'entrée,
- $s_{(t)}$ le signal temporel de sortie,
- $h_{(t)}$ la réponse impulsionnelle du SLIT,

et $E_{(f)}$, $S_{(f)}$ et $H_{(f)}$ les transformées de Fourier respectivement de $e_{(t)}$, $s_{(t)}$ et $h_{(t)}$.

1-3-1. Ecrire la relation qui lie la sortie $s_{(t)}$ aux grandeurs $e_{(t)}$ et $h_{(t)}$.

1-3-2. Comment appelle-t-on cette fonction ?

1-3-3. Ecrire la fonction de transfert qui lie $H_{(f)}$ aux grandeurs $E_{(f)}$ et $S_{(f)}$.

1-4- Fonction de transfert :

La fonction de transfert d'un Système Linéaire Invariant dans le Temps s'écrit avec la notation complexe de Laplace, comme le rapport de deux polynômes (Équation 2).

$$H_{(p)} = \frac{N_{(P)}}{D_{(P)}} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + a_4 p^4 + \ldots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + b_3 p^3 + b_4 p^4 + \ldots + b_m p^m} \qquad \text{Équation 2}$$

1-4-1. Pourquoi le degré du numérateur (*n*) doit-il être inférieur ou égal au degré du dénominateur (*m*) ?

1-4-2. Quelle est la condition nécessaire et suffisante pour que le système ayant $H_{(p)}$ comme fonction de transfert soit stable ?

1-4-3. Soit un SILT (filtre passe bas du deuxième ordre) dont la fonction de transfert H(p) est donnée par l'Équation 3

$$H_{(p)} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{w_0} p + \left(\frac{1}{w_0} p\right)^2} \qquad \text{Équation 3}$$

Quelle précaution doit-on prendre sur la valeur des paramètres *m* et w_0 pour que ce filtre soit stable ?

Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

1-5- Transformée de Laplace

1-5-1. Calculer l'original $h_{1(t)}$ et $h_{2(t)}$ (transformée de Laplace inverse) des fonctions $H_{1(p)}$ et $H_{2(p)}$ suivantes :

$$H_{1(p)} = \frac{k}{p+a} \qquad H_{2(p)} = \frac{k(w\cos j + (p+a)\sin j)}{(p+a)^2 + w^2} \qquad \text{Équation 4}$$

1-5-2. En utilisant les deux réponses impulsionnelles ($h_{1(t)}$ et $h_{2(t)}$) obtenues ci-dessus, compléter le graphique (Figure 2) dans les 6 cas possibles (*utiliser le graphique de la feuille de réponse et le joindre à vos copies*).

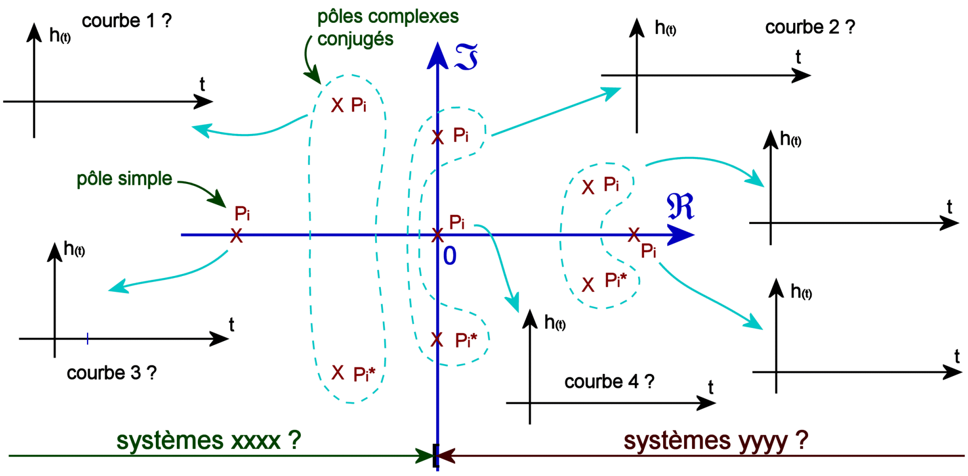


Figure 2 : Pôles dans le plan complexe

1-5-3. Donner les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.

2- Exercice 1 : Signal aléatoire

(11 points)

2-1- Soit une variable aléatoire X définie par sa fonction de densité de probabilité $f_{X(x)}$.

$$f_{X(x)} = \begin{cases} k & pour \quad a \le x \le b \\ 0 & pour \quad x < a \quad ou \quad b < x \end{cases} \quad \text{avec k constant} \qquad \text{Équation 5}$$

2-1-1. Déterminer la valeur de k.

2-1-2. Pour a = $-\pi$ et b = $+\pi$, calculer k puis représenter $f_{X(x)}$.

2-1-3. Calculer la fonction de répartition $F_{X(x)}$.

2-1-4. Représenter $F_{X(x)}$.

2-2- Soit un processus aléatoire $X_{(t)}$ défini par l'Équation 6

$$X_{(t)} = A\cos(wt + j) \qquad \text{Équation 6}$$

Avec A et ω constants et φ une variable aléatoire uniforme sur l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.

2-2-1. Calculer l'espérance mathématique de $X_{(t)}$.

2-2-2. Calculer l'autocorrélation notée $R_{XX(\tau)}$ de $X_{(t)}$.

2-2-3. Que représente l'autocorrélation en zéro (notée $R_{XX(0)}$) de $X_{(t)}$.

2-2-4. Le signal $X_{(t)}$ est-il stationnaire au sens large ?

Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

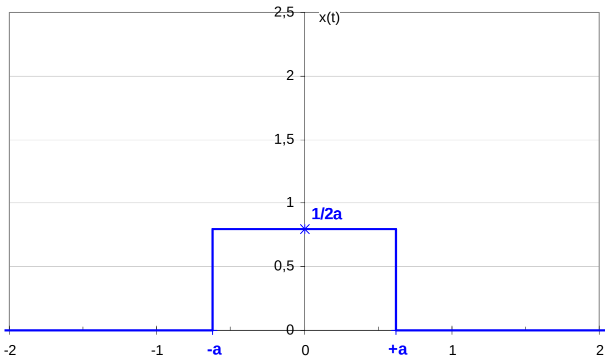
*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

3- Exercice 2 : Filtre et transformée de Fourier (15 points)

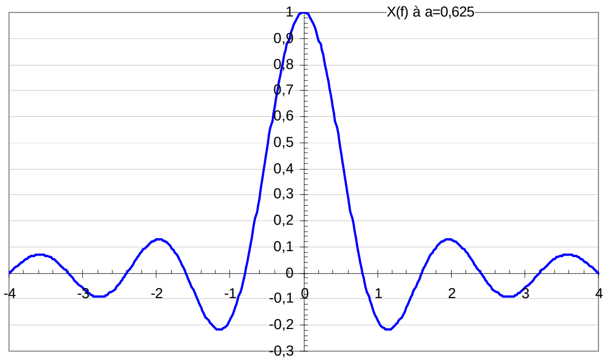
Rappel : Il a été démontré en cours que la transformée de Fourier X(f) d'une impulsion rectangulaire x(t) définie par l'Équation 7 est un sinus cardinal (Équation 8)

$$x_{(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & pour \quad |t| \le a \\ 0 & pour \quad |t| > a \end{cases} \qquad \text{Équation 7}$$

$$X_{(f)} = \frac{\sin(2paf)}{2paf} \qquad \text{Équation 8}$$



TF
⇒



3-1- Représenter l'allure du module et de la phase de H(f), la fonction de transfert du SLIT donnée par l'Équation 9.

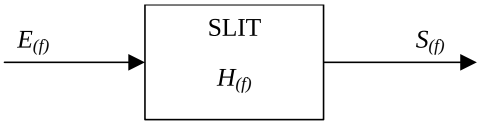


Figure 3

$$H_{(f)} = k.e^{-j2pft} \qquad \text{pour } |\,f\,| \le F_1$$

$$H_{(f)} = 0 \qquad \text{pour } |\,f\,| > F_1$$

Équation 9
(filtre passe bas parfait)

3-2- En s'aidant de l'Équation 8 et des propriétés de la transformée de Fourier, donner l'expression h(t) de la réponse impulsionnelle du SLIT (Figure 3), dont la fonction de transfert H(f) est donnée par l'Équation 9.

3-3- Représenter l'allure de la réponse impulsionnelle h(t).

3-4- Expliquer pourquoi ce filtre passe bas (parfait) n'est pas physiquement réalisable.

3-5- Calculer la fonction de transfert $H_{T(f)}$ du SLIT représenté par la Figure 4, et composé par deux SLIT ($H_{A(f)}$ F_{1A} et $H_{B(f)}$ F_{1B}) définis par l'Équation 9, avec F_{1B} inférieure à F_{1A}.

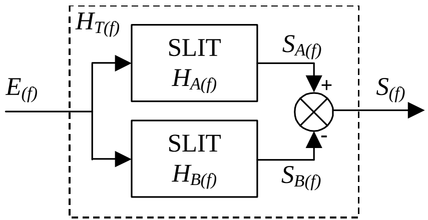


Figure 4

3-6- Représenter le module de $H_{T(f)}$ et expliquer pourquoi ce SLIT est appelé filtre passe bande.

3-7- En se basant sur le même principe de construction que $H_{T(f)}$, calculer la réponse impulsionnelle $h_{T(t)}$.

Examen partiel du samedi 29 avril 2006 : durée 2 heures

*Sans documents sauf l'**Aide mémoire mathématique** jaune de 8 pages, calculatrice autorisée.*

Nom : .... Prénom : .... copie n° .../...

Exercice 1-5-2